



Уральский
федеральный
университет

имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина

Уральский
энергетический
институт

В. П. ОБОСКАЛОВ
С. Е. КОКИН
И. Л. КИРПИКОВА

ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И ТЕОРИИ ГРАФОВ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Учебное пособие



Министерство образования и науки Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

В. П. Обоскалов, С. Е. Кокин, И. Л. Кирпикова

Применение вероятностно-статистических методов и теории графов в электроэнергетике

*Рекомендовано методическим советом Уральского федерального
университета в качестве **учебного пособия** для студентов вуза,
обучающихся по направлениям подготовки
13.04.02 «Электроэнергетика и электротехника» (магистр)*

Екатеринбург
УрФУ
2016

УДК 51:621.3.05(075.8)
ББК 22.17я73+31.2я73
О-22

Рецензенты: кафедра электрооборудования и энергоснабжения
Российского государственного профессионально-
педагогического университета (зав. кафедрой канд.
техн. наук, доц. *А. О. Прокубовская*);
д-р техн. наук, проф. *Ф. Н. Саранулов*

На обложке – изображение с сайта www.chaskor.ru

Обоскалов, В. П.

О-22 Применение вероятностно-статистических методов и теории
графов в электроэнергетике : учеб. пособие / В. П. Обоскалов,
С. Е. Кокин, И. Л. Кирпикова. – Екатеринбург : УрФУ, 2016. –
271,[1] с.
ISBN 978-5-321-02507-9

Постоянное совершенствование учебного процесса предопределяет соответствующее изменение структуры изучаемых дисциплин. В связи с этим появляется потребность более глубокого изучения теоретических основ электроэнергетики в целом и электроэнергетических систем в частности. Появляются новые дисциплины, отсутствовавшие в программах инженерного образования. Одной из таких дисциплин является «Дополнительные главы математики». В то же время практически невозможно в рамках одного пособия осветить все актуальные для электроэнергетики разделы математики, поэтому в рамках дисциплины «Дополнительные главы математики» предполагается издание ряда узконаправленных учебных пособий.

В предлагаемом учебном пособии изложены основные принципы и алгоритмы применения в электроэнергетике теорий графов, вероятностей математической статистики.

Пособие предназначено для студентов, аспирантов и слушателей курсов повышения квалификации специальностей ГОС 140200 – Электроэнергетика, ФГОС 140400 – Электроэнергетика и электротехника, а также для всех, кто интересуется решением прикладных задач упомянутых разделов математики.

УДК 51:621.3.05(075.8)
ББК 22.17я73+31.2я73

ISBN 978-5-321-02507-9

© Обоскалов В. П., Кокин С. Е.,
Кирпикова И. Л., 2016

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемое читателю учебное пособие предназначено, в основном, для студентов, обучающихся в магистратуре по направлению «Электроэнергетика», но, в силу его математической направленности, с успехом может быть использовано не только электриками и не только магистрантами, но и студентами старших курсов (после изучения основ высшей математики) иных специальностей.

Пособие ориентировано на использование при изучении дисциплины «Дополнительные главы математики». Широкое название дисциплины определяется необходимостью выбора и освоения тех разделов математики, которые соответствуют наиболее актуальным проблемам электроэнергетики.

Пособие состоит из двух существенно отличающихся друг от друга разделов, связанных с применением в электротехнических расчетах вероятностно-статистических и графовых методов и алгоритмов. Почему для такой широко ориентированной дисциплины, как «Дополнительные главы математики», выбраны эти разделы математики? Вероятно, потому, что авторы (инженеры-электрики) в своей профессиональной деятельности больше связаны именно с этими разделами математики и считают, что без их изучения электроэнергетика как наука просто немыслима. Безусловно, авторы допускают, что в математике есть еще что-то, не менее интересное и не менее полезное для электротехнических расчетов, но, как говорил Козьма Прутков, «нельзя объять необъятное». Оставим другие разделы до лучших времен. Возможно, и писать их будут другие авторы.

Теория вероятности и математическая статистика выбраны нами, поскольку расчеты, связанные с детерминированными процессами и величинами, в электроэнергетике по большей части освоены и достаточно полно освещены в учебной литературе. В настоящее время инженеры все больше внимания уделяют вероятностным расчетам, поскольку нас, как правило, интересуют не конкретные числа (напряжение узла $U_i = 112,853$ кВ), а пределы контролируемых параметров (например, $111 \leq U_i \leq 113$). При этом мы осознаем, что все, с чем мы имеем дело, не имеет точных измерений. Линейное сопротивление и проводимость на землю линии электропередачи зависят от температуры и влажности окружающего воздуха, протекающего тока, стрелы провеса и др. Еще в большей степени вероятностный характер имеет мощность нагрузки, которая во многом зависит от того, когда

нам захочется принять душ, и мы включим электробойлер. В результате все наши расчеты неточны, и вызывают улыбку расчетные величины с числом значащих цифр от четырех и более.

Традиционно неопределенность данных моделируется с помощью методов теории вероятности и математической статистики, а также теории нечетких множеств. В основе методов вероятностного анализа электроэнергетических задач лежат достаточно глубоко проработанные и сформированные преобразования систем случайных величин. В результате расчеты режимов работы технических систем с учетом вероятностной природы их параметров зачастую сводятся к детерминированным расчетам, например, в качестве исходных данных рассматриваются средние значения наблюдаемых величин (сопротивления, мощности и др.). Отсюда для вероятностных расчетов могут использоваться одни и те же математические модели и программные комплексы, которые хорошо себя зарекомендовали в детерминированных расчетах. Учет дисперсии и корреляции параметров электрических режимов существенно усложняет расчетные процедуры.

Теория нечетких множеств получила меньшее развитие, но уже и сегодня существуют разработанные на ее основе солверы, позволяющие успешно применять ее в технике, например при оценке работоспособности сложных электротехнических устройств и установок. Несмотря на схожесть исходных предпосылок, теории вероятностей и нечетких множеств развиваются разными курсами, и их изучение традиционно разделяется. На кафедре АЭС УрФУ предполагается включить раздел, связанный с применением нечетких множеств в электроэнергетике, в дисциплину «Дополнительные главы математики», но в данное учебное пособие эти вопросы не включены, поскольку они достаточно хорошо описаны в учебных пособиях Л. Л. Богатырева [1; 2].

Теория графов в электроэнергетике нашла свое применение, прежде всего, из-за необходимости топологического представления схем электрических сетей и электроустановок (распределительные устройства станций и подстанций), схем вторичной коммутации, расчетных схем (надежности) и др. Многие алгоритмы теории графов (например, поиск минимальных путей и сечений) используются в электроэнергетике (надежность систем электроснабжения потребителей электрической энергии).

Предлагаемое теорией графов представление данных о топологии в виде связанных списков широко используется в электроэнергетике практически всеми программными комплексами при решении систем уравнений узловых напряжений со слабо заполненной матрицей проводимости. С развитием объектно-ориентированного программирования появляются новые средства хранения информации о топологии и характеристиках элементов электрических схем, но при этом остается неизменной их графовая структура. Поскольку к специалисту в области электроэнергетики предъявляются требования умений и навыков программирования, то изучение основ теории графов является необходимым в рамках высшего образования.

При подготовке данного учебного пособия авторы широко использовали существующие наработки кафедры АЭС по рассматриваемым вопросам [3; 4]. Работа над пособием распределена следующим образом: предисловие, главы 1–4 и приложения – В. П. Обоскалов, глава 5 – И. Л. Кирпикова, главы 6–7 – С. Е. Кокин.

Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания при подготовке рукописи.

ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

В данной главе в кратком виде приведены наиболее важные сведения из области теории вероятностей, а также базисные определения и теоремы, которые применяются в прикладных задачах электроэнергетики и, следовательно, необходимы для более глубокого понимания рассматриваемых проблем. Излагая эти сведения, авторы ориентировались на прикладной характер теории вероятностей. Поэтому большинство выводов и доказательств опущено. Для тех, кто желает более детально ознакомиться с теорией вероятностей и связанными с ней вопросами, существует большое количество превосходных учебников. Для студентов инженерных факультетов обычно рекомендуются источники [5–9]. Кратко, но достаточно информативно теория вероятности дана в справочной литературе [10; 11].

1.1. Базовые понятия

1.1.1. События

Случай является одним из наиболее загадочных явлений на свете, он внезапно возникает и так же внезапно исчезает – столь внезапно, что не позволяет нам проникнуть в свою сущность. Только в XX в. математики научились оперировать с вероятностью, хотя отдельные задачи о подсчете шансов в азартных играх рассматривались еще в XV–XVI в. Древние греки, приучившие нас к количественному взгляду на мир, пришли бы в ужас, если бы узнали, что мы научились с помощью теории вероятностей вычислять шансы и оценивать, какие события более вероятны, а какие менее вероятны, например, в азартных играх.

Знаменитые итальянские математики Кардано, Пачоли и Тарталья, а вслед за ними Паскаль, Ферма, Гюйгенс в XVII в. разрабатывали все более и более изощренные способы подсчета вероятностей в разнообразных игровых задачах и в популярных лотереях. Их изобретательность была поистине удивительна. Используя, на наш взгляд, ограниченный язык математико-логических описаний, они смогли объяснить глубокие явления. Существенное движение вперед произошло тогда, когда математики осознали, что очень схожие вероят-

ностные описания и закономерности возникают в разных на первый взгляд практических приложениях.

Обычно под **событием** понимается нечто, что может произойти или не произойти, например КЗ в электрической сети или разрушение генератора на Саяно-Шушенской ГЭС. Понятие события в том смысле, в каком оно используется в теории вероятностей, обычно связывается с исходами многократно повторяемых экспериментов (вряд ли это применимо к Саяно-Шушенской ГЭС). Рассмотрим некоторый эксперимент, например бросание двух игральных кубиков. Каждое действие, или испытание, в ходе эксперимента приводит к некоторому исходу, который может оказаться разным в серии испытаний. **Множество всех возможных исходов составляет пространство элементарных событий Q** . Однако событием может быть не только элемент Q , но и некоторое подмножество Q , включающее в себя все исходы, которые удовлетворяют некоторому критерию или требованию, например, сумма цифр, выпавших при бросании двух кубиков, составляет 9. При каждом испытании событие либо происходит, либо не происходит в соответствии с тем, удовлетворяется или не удовлетворяется заданный критерий.

События, как правило, представляются в виде множеств. Множество может иметь конечное или бесконечное число элементов или не иметь ни одного элемента (пустое множество). Например, множество нечетных чисел состоит из элементов 1, 3, 5 и т. д. (бесконечное множество); множество игральных карт в колоде состоит из карт с обозначениями 2, 3, ..., В, Д, К, Т (конечное множество), нагрузка в узле изменяется в диапазоне от 0 до 100 МВт (бесконечное, непрерывное множество), совокупность выключателей, находящихся в ремонте, состоит из многообразия их всевозможных сочетаний и т. д. Если x_1, x_2, \dots, x_n – члены (или элементы) множества A , то обычно принято обозначать это следующим образом: $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, и если x является членом множества A , то это обозначается $x \in A$.

Соотношение между двумя множествами (рис. 1.1) зависит от того, имеют эти множества общие элементы или нет. **Операции с множествами** иллюстрируются с помощью диаграмм Вьенна (рис. 1.2). Для двух множеств A и B существуют следующие возможности:

а) A и B имеют общие элементы, но каждое из множеств имеет также элементы, которые не принадлежат к другому множеству. В этом случае говорят, что множества пересекаются. Например, множество нечетных чисел и множество квадратов целых чисел являются

пересекающимися множествами ($3^2 = 9$ – нечетное число, но нет такого целого числа, чтобы его квадрат был равен 3). Графически пересечение множеств можно проиллюстрировать так, как это изображено на рис. 1.1, а;

б) A и B не имеют общих элементов (рис. 1.1, б). В этом случае множества называют взаимно исключающими, или непересекающимися. Например, множество людей с двумя голубыми глазами и множество людей с двумя карими глазами являются взаимно исключающими. Два события A и B считаются несовместными, если может произойти либо то, либо другое, но невозможно появление и того, и другого одновременно;

в) одно из множеств целиком включает в себя другое множество. Если, например, A включает в себя B , то каждый элемент B является в то же время элементом A ; кроме того, A может иметь элементы, не входящие в B . В этом случае говорят, что множество B является подмножеством множества A , и используют обозначение $B \subset A$. Это соотношение между множествами изображено графически на рис. 1.1, в.

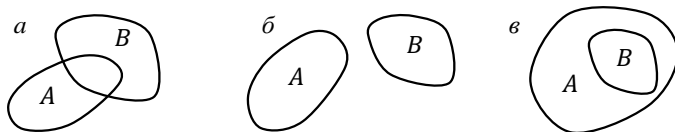


Рис. 1.1. Соотношение между множествами

Операции с множествами иллюстрируются с помощью диаграмм Вьенна (рис. 1.2).

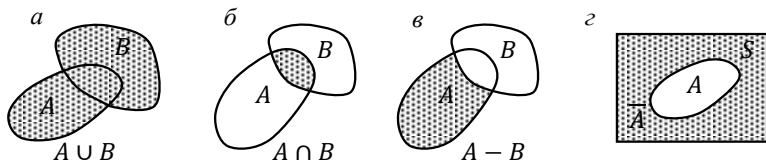


Рис. 1.2. Диаграммы Вьенна

Объединением двух множеств (рис. 1.2, а) называют множество, которое содержит все элементы составляющих его множеств. Объединение множеств A и B обозначают $A \cup B$ или, в некоторых случаях, $A + B$ (не рекомендуется).

Пересечением двух множеств (рис. 1.2, б) называют множество, которое содержит все элементы, являющиеся общими для обоих множеств. Пересечение множеств A и B обозначают $A \cap B$ или иногда $A \cdot B$ или AB (не рекомендуется). Отметим, что если A и B – не пересекающиеся множества, то $A \cap B = 0$.

Разностью двух множеств $A - B$ (рис. 1.2, в) называют множество, состоящее из тех элементов множества A , которые в то же время не являются элементами множества B . Отметим, что $(A - B) + B = A + B$, а не просто A (в этом заключается одна из причин того, почему следует избегать обозначений «+» и т. п., поскольку они могут привести к недоразумениям, как в данном примере).

Пусть S – множество всех возможных элементов. Отсюда каждое другое множество из тех же элементов будет являться подмножеством множества S . Дополнением \bar{A} множества A (рис. 1.2, г) называют множество, состоящее из всех тех элементов, которые не входят в A . Следовательно, $\bar{\bar{A}} = A$, или

$$A \cup \bar{A} = S \text{ и } A \cap \bar{A} = 0.$$

С помощью представленных операций можно построить алгебру множеств. Нетрудно убедиться в том, что справедливы следующие, часто используемые логические формулы:

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C); \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C); \\ \overline{A \cup B} &= \bar{A} \cap \bar{B}; \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}; \\ A \cap B &= \overline{\bar{A} \cup \bar{B}}; \quad A = (A \cap B) \cup (A \cap \bar{B}). \end{aligned} \tag{1.1}$$

1.1.2. Случайные величины и случайные процессы

Случайные величины. Случайная величина – это величина, которая принимает в результате опыта одно из совокупности возможных значений, причем появление того или иного значения этой величины до ее измерения нельзя точно предсказать. Случайные величины могут принимать дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные значения. Соответственно случайные величины классифицируют на дискретные, непрерывные и дискретно-непрерывные (смешанные).

Примеры: число генераторов, которые в следующем месяце будут находиться в состоянии аварийного восстановления, – дискретная случайная величина; длительность периода между двумя отказами выключателя – непрерывная случайная величина, нагрузка токарного

станка дискретна в точке 0 и непрерывна от минимума до максимума; переток мощности по линии электропередачи с ограниченной пропускной способностью и с отключением ЛЭП при превышении предельно допустимого перетока – это примеры смешанных случайных величин.

Случайная величина может быть как одномерной, например суммарная нагрузка ЭЭС, так и многомерной, например нагрузка ЭЭС как вектор, состоящий из нагрузок отдельных узлов ЭЭС.

Результаты опытов могут характеризовать не только отдельные элементарные исходы в схеме испытаний, но и некоторые сопутствующие (функциональные) числовые характеристики, которые вслед за случайным исходом принимают случайные значения. В качестве примера здесь может служить ущерб от недоотпуска электроэнергии потребителям, зависящий от момента возникновения аварии, глубины ограничения нагрузки, длительности аварийного восстановления.

Случайные процессы. В теории структурной надежности ЭЭС состояния системы в произвольный момент времени рассматриваются как дискретные и определяются той или иной совокупностью состояний элементов $\{x_i\}$, входящих в состав системы, $S(t) = \bar{X}(t) = \{x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)\}$, где t – параметр рассматриваемого процесса, как правило, это время. При этом считается, что каждый элемент может находиться в одном из двух состояний – работа ($x_i(t) = 1$) или отказ ($x_i(t) = 0$). Таким образом, процесс функционирования каждого элемента может рассматриваться как альтернирующий – работоспособное состояние (элемент включен, $x_i(t) = 1$) и состояние аварийно-восстановительного ремонта (элемент отключен, $x_i(t) = 0$) (рис. 1.3).

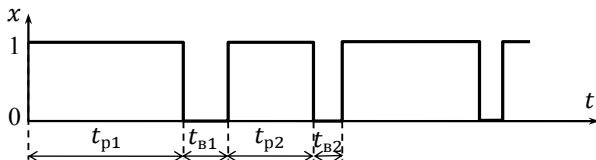


Рис. 1.3. Альтернирующий процесс функционирования элемента

Длительности того или иного состояния (работа, восстановление) являются непрерывными случайными величинами. Процессы, где длительности состояний (а следовательно, и сами состояния) яв-

ляются случайными величинами, обычно называются стохастическими, вероятностными или случайными процессами.

В сущности стохастический процесс представляет собой множество случайных величин, образующих упорядоченную последовательность. Например, длительности безотказной работы и восстановления образуют последовательность случайных значений, так что эту последовательность можно рассматривать в качестве стохастического процесса [12].

Параметр t (время) может быть непрерывным (как в рассматриваемом случае) или дискретным (что часто используется для практических расчетов динамических процессов). Дискретный параметр может принимать конечное или бесконечное число значений, непрерывный параметр, естественно, может принимать только бесконечное число значений. Значения, принимаемые случайными величинами, образуют пространство состояний. Это пространство, в свою очередь, может быть дискретным (состояния элементов ЭЭС) или непрерывным (напряжения узлов, токи в линиях электропередачи).

1.1.3. Вероятность

Вероятность – мера, связанная с событиями. Более узко вероятность представляется как действительная функция, определенная в пространстве событий, что означает, что каждому событию соответствует некоторое значение вероятности. Значения вероятностей ограничены таким образом, что они могут находиться на отрезке от 0 до 1, причем значение 1 соответствует достоверному событию (обязательно произойдет), а значение 0 – невозможному событию. Таким образом, вероятность $P[E]$ некоторого события E должна удовлетворять следующим требованиям:

$$0 \leq P[E] \leq 1; \quad (1.2)$$

$$P[\Omega] = 1, P[\emptyset] = 0, \quad (1.3)$$

где Ω – достоверное, а \emptyset – невозможное события.

Кроме того, для двух *несовместимых* событий E_A и E_B :

$$P[E_A \cup E_B] = P[E_A] + P[E_B]; \quad P[E_A \cap E_B] = 0. \quad (1.4)$$

Три утверждения (1.2), (1.3), (1.4) называют аксиомами вероятности (они постулируются, но не доказываются). На основе этих аксиом строится вся теория вероятностей. Совершенно очевидно, что приведенные аксиомы не могут помочь определить значение вероятности данного конкретного события. Эти аксиомы позволяют лишь определить правила оперирования с вероятностями. *Реальные число-*

вые значения вероятностей необходимо находить на основе опыта или рассуждений. Соответственно, те способы, с помощью которых можно численно оценить значения вероятностей, подразделяются на два класса, первый из которых основан на экспериментальных данных (*апостериорные вероятности*), а второй основан на предварительных суждениях (*априорные вероятности*).

Подход, основанный на экспериментальных данных, называют **методом относительной частоты**. В этом методе некий эксперимент повторяют n раз, и если из n испытаний было n_E таких, когда произошло событие E , то вероятность возникновения события E оценивается как n_E/n . Это приближение улучшается по мере роста n , и точное значение $P[E]$ дается формулой:

$$P[E] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_E}{n}. \quad (1.5)$$

Вероятности, полученные с помощью (1.5), удовлетворяют аксиомам (точнее, аксиомы определены так, чтобы соответствовать вероятностям, полученным методом относительных частот). До того как были сформулированы упомянутые выше **аксиомы Колмогорова**, понятие вероятности определялось только с помощью соотношения (1.5). Это определение вызывает некоторую неудовлетворенность, поскольку *математическое понятие определяется через предел последовательности экспериментальных данных (при этом неявно подразумевается, что такой предел вообще существует)*. Однако в практике интерпретация вероятности как относительной частоты все же остается наиболее надежным способом для получения численных значений вероятностей.

Из априорных подходов, прежде всего, необходимо отметить подход, основанный на **понятии равновозможных исходов**. Это понятие называют иногда классическим определением вероятности. Можно утверждать, что если все исходы некоторого эксперимента равновозможны, то вероятность события определяется соотношением числа благоприятных исходов эксперимента к общему числу возможных исходов. Например, при бросании игрального кубика можно полагать все шесть возможных исходов равновозможными. Тогда вероятность того, что на кубике выпадает число 3, равна $1/6$, а вероятность выпадения числа не меньше трех равна отношению числа благоприятных исходов (четыре исхода) к общему числу исходов, т. е. $4/6$. Этот результат можно получить без всяких экспериментов. Такой

подход также дает численные значения вероятностей, которые удовлетворяют перечисленным выше аксиомам.

Другой априорный подход основан на **мнении**, или **рассуждении**. Этот подход не лишен смысла, и в действительности часто случается, что можно «угадать» вероятности исходов в проводимом или планируемом эксперименте. Так, основываясь на знаниях об уровне мастерства игроков, можно приписать некоторую вероятность событию, что данный игрок выиграет игру, даже если игроки встречаются в первый раз. Этот подход иногда применяют в инженерном деле, но если первоначально возможно использование таких оценок вероятностей, то в дальнейшем, как только будет накоплено достаточное количество экспериментальных данных, желательно корректировать их оценками, основанными на относительных частотах.

Условная вероятность. Часто случается так, что вероятность события A зависит от того, произошло или не произошло некоторое иное событие B (перегрузка работающего трансформатора при условии, что произошло отключение второго параллельного трансформатора). В таких случаях вероятность является условной, и для ее обозначения используют форму $P[A|B]$, означающую вероятность события A при условии, что B произошло. Например, вероятность появления дефицита мощности в ЭЭС зависит от того, включен или отключен генератор 500 МВт.

Зная условные вероятности и вероятности определяющих событий, можно определить безусловную вероятность рассматриваемого события. Событие A происходит при условии, что событие B либо произошло (вероятность $P[B]$), либо не произошло (вероятность $P[\bar{B}]$). Отсюда

$$P[A] = P[A|B] P[B] + P[A|\bar{B}] P[\bar{B}].$$

Здесь события B и \bar{B} образуют полную группу со свойствами:

$$\sum_{i=1}^n P[B_i] = 1; P[B_i \cap B_j] = 0, i \neq j.$$

Обобщая, можно сказать, что если $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ образуют полную группу несовместных событий, то

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A|B_i] \cdot P[B_i]. \quad (1.6)$$

Данная формула носит название **формулы полной вероятности**.

Два события A и B являются независимыми, если $P[A|B] = P[A]$.

Если произошло событие B , а затем событие A , то это означает, что имеет место одновременное наступление двух событий A и B (событие $P[A \cap B]$). Отсюда

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B]. \quad (1.7)$$

В то же время одновременное наступление двух событий A и B возможно и в том случае, если первым наступило событие A . Тогда

$$P[A \cap B] = P[A|B] \cdot P[B] = P[B|A] \cdot P[A].$$

Следствием этого уравнения является *теорема Бейеса*:

$$P[A|B] = P[B|A] \cdot P[A]/P[B]. \quad (1.8)$$

Это уравнение позволяет вводить поправки в априорные значения вероятностей $P[A]$ на основе некоторых экспериментальных данных, представленных в виде $P[A|B]$ и $P[B]$. Кроме того, если события A и B являются независимыми ($P[A|B] = P[A]$), то $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$.

С учетом (1.7) формула полной вероятности принимает вид:

$$P[A] = \sum_{i=1}^n P[A \cap B_i].$$

Вероятность объединения двух событий определяется соотношением

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B].$$

Если события A и B являются независимыми, то

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A] \cdot P[B].$$

Рассмотрим в качестве примера систему электроснабжения, состоящую из двух независимых элементов – линии электропередачи (элемент L) с вероятностью отказа q_L и трансформатора (элемент T) с вероятностью отказа q_T . Работоспособность системы возможна лишь при работоспособном состоянии обоих элементов $S = L \cap T$. При этом соответствующая вероятность

$$P[S] = P[L \cap T] = P[L] \cdot P[T] = p_L p_T,$$

где $p_L = 1 - q_L$; $p_T = 1 - q_T$.

Согласно соотношениям (1.1) вероятность отказа системы электроснабжения

$$\begin{aligned} P[\bar{S}] &= P[\overline{L \cap T}] = P[\bar{L} \cup \bar{T}] = P[\bar{L}] + P[\bar{T}] - P[\bar{L}] \cdot P[\bar{T}] = \\ &= q_L + q_T - q_L q_T. \end{aligned}$$

1.1.4. Вероятностные характеристики случайных величин

Функция распределения (ФР) $F(x)$ определяет вероятность того, что значение случайной величины ξ *строго меньше* вещественного числа x .

$$F(x) = P(\xi < x).$$

Из этого, в частности, следует, что вероятность попадания значения случайной величины в полуинтервал $[a, b)$ равна

$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a).$$

Функция распределения произвольной случайной величины обладает следующими свойствами:

- $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$;
- $F(x)$ *монотонно не убывает*, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leq F(x_2)$;
- $F(x)$ *непрерывна слева*.

Если случайная величина ξ дискретна, то полное и однозначное математическое описание ее распределения определяется указанием вероятностей $p_k = P(\xi = x_k)$ всех возможных значений этой случайной величины. Совокупность пар $\{x_k, p_k\}$ образует так называемый **вероятностный ряд**. Аналогом ФР здесь является накопленная вероятность.

Функция распределения дискретной случайной величины

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

Преимущество использования функции распределения заключается в том, что с ее помощью удастся достичь единообразного математического описания дискретных, непрерывных и дискретно-непрерывных случайных величин. Каждая случайная величина имеет свою ФР. Однако одна и та же ФР может описывать разные случайные величины.

Дополнительная функция распределения, $\mathcal{F}(t) = 1 - F(t)$.

В теории надежности, применительно к длительности безотказной работы, эта функция носит название функции надежности. В частности, длительность безотказной работы элемента ЭЭС описывается экспоненциальным распределением:

$$\mathcal{F}(t) = 1 - F(t) = \exp(-\lambda t), \quad (1.9)$$

где λ – интенсивность отказа.

Плотность распределения

$$f(x) = F'(x). \quad (1.10)$$

Часто именно эта функция представляет то или иное распределение вероятности. Для дискретных случайных величин $f(x)$ представляется вероятностным рядом $\{(x_k, p_k, k = 1, \dots, K)\}$.

Согласно (1.10)

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx. \quad (1.11)$$

Функция риска определяется соотношением

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{F(x)}. \quad (1.12)$$

Для экспоненциального распределения $\lambda(x) = \lambda = \text{const}$.

Применительно к теории надежности технических систем, где x – это время t , функция риска – это **функция интенсивности отказа** элемента или системы. В общем случае интенсивность отказов $\lambda(t)$ непостоянна во времени.

Экспоненциальное распределение отражает частный случай. Реальные технические объекты характеризуются корытообразной формой функции $\lambda(t)$ (рис. 1.4). Период эксплуатации условно подразделяется на три интервала: A – начальный – период, где $\lambda(t)$ имеет ниспадающий характер, а отказы чаще всего случаются из-за заводских дефектов, и где, как правило, завод несет ответственность за надежность изделия в виде гарантийного ремонта; B – центральный (основной эксплуатационный период), где $\lambda(t) \approx$, и C – период старения, где $\lambda(t)$ возрастает во времени.

Безусловно, описанные процессы характерны на всем периоде функционирования объекта: заводские дефекты могут проявиться через много лет после окончания срока гарантийного ремонта, а старение изоляции начинается с первого дня эксплуатации объекта. Те и другие процессы могут рассматриваться как экспоненциальные, а в результате комбинации распределений образуется корытообразная форма $\lambda(t)$ объекта в целом.

Кривая (рис. 1.4) была первоначально получена при обработке данных переписи населения, и упомянутые периоды интерпретировались следующим образом: A – период детской смертности, B – смертность в зрелом возрасте из-за болезней и несчастных случаев, C – смертность по старости. Однако, как оказалось впоследствии, эта кривая вполне приемлема не только для описания жизненного цикла человека и технических систем, но и для биологических, социальных, политических и иных систем и явлений.

Экспоненциальное распределение можно использовать для систем и элементов с регламентированным обслуживанием (рис. 1.5).

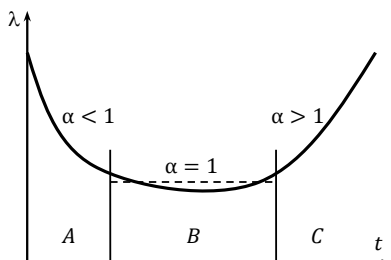


Рис. 1.4. Интенсивность отказов реальных объектов

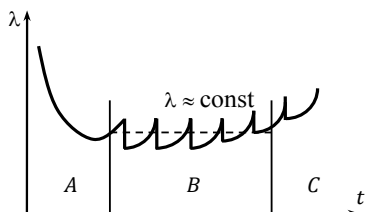


Рис. 1.5. Интенсивность отказов объектов с регламентированным ремонтом

Считается, что в результате ремонта ресурс элемента (системы) восстанавливается полностью (или почти полностью). Небольшие изменения интенсивности отказов на межремонтном периоде обычно игнорируются, и тогда интенсивность отказов условно можно считать постоянной.

Из (1.10), (1.11), (1.12) можно записать:

$$\lambda(x)dx = -\frac{dF(x)}{F(x)} = -d(\ln(\bar{F}(x))).$$

Отсюда, принимая $F(0) = 1$, получаем важное в теории восстановлений соотношение:

$$F(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(x)dx\right). \quad (1.13)$$

Взаимосвязь между вероятностными функциями представлена в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Взаимосвязь между вероятностными функциями

Функция	Определяющее соотношение	$F(t)$	$\mathcal{F}(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$F(t)$	$\int f(t) dt$	—	$1 - \mathcal{F}(t)$	$\int f(t) dt$	$1 - \exp\left(-\int \lambda(t) dt\right)$
$\mathcal{F}(t)$	$1 - F(t)$	$1 - F(t)$	—	$\int_t^\infty f(t) dt$	$\exp\left(-\int \lambda(t) dt\right)$
$f(t)$	$\frac{d}{dt} F(t)$	$\frac{d}{dt} F(t)$	$-\frac{d}{dt} \mathcal{F}(t)$	—	$\lambda(t) \exp\left(-\int \lambda(t) dt\right)$

Функция	Определяющее соотношение	$F(t)$	$\mathcal{F}(t)$	$f(t)$	$\lambda(t)$
$\lambda(t)$	$\frac{f(x)}{\mathcal{F}(x)}$	$\frac{F'(t)}{1 - F(t)}$	$-\frac{d}{dt}[\ln \mathcal{F}(t)]$	$\frac{f(t)}{\int_t^\infty f(t) dt}$	—

1.1.5. Параметры случайных величин

Математическое ожидание (МО) (expectation mean) случайной величины ξ

$$M(\xi) = m = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x).$$

Для дискретных случайных величин

$$M(\xi) = \sum_{\forall i} x_i p_i.$$

МО определяет положение центра распределения. Если масса тела интерпретируется вероятностью, а x – координата массы, то МО – положение центра тяжести системы масс.

Дисперсия (variance) случайной величины

$$\begin{aligned} D(\xi) = \sigma^2 &= M(\xi - m)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x) dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 dF(x). \end{aligned}$$

Для дискретных случайных величин

$$\sigma^2 = \sum_{\forall i} (x_i - m)^2 p_i.$$

Величина σ называется среднеквадратическим, или стандартным (что более современно), отклонением (standard deviation). Величина σ есть мера рассеяния случайной величины относительно математического ожидания.

Операция вычитания математического ожидания из значений случайной величины называется центрированием, а сама величина $\Delta x = x - m_x$ – центрированной. Очевидно, математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю.

С учетом приведенных выражений любой случайной величине можно поставить в соответствие величину ξ_0 , обладающую нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией:

$$\xi_0 = (\xi - m)/\sigma.$$

Такая операция называется нормированием случайной величины. Она применяется в математической статистике, когда некоторое стандартное распределение нужно использовать для анализа похожего по форме и содержанию распределения, уже не являющегося стандартным.

Начальный момент порядка k

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF(x).$$

Для дискретных случайных величин

$$m_k = \sum_{\forall i} x_i^k p_i.$$

Нетрудно видеть, что МО – начальный момент первого порядка.

$$E(\xi) = m_1.$$

Центральный момент порядка k

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^k f(x) dx.$$

Для дискретных случайных величин

$$\mu_k = \sum_{\forall i} (x_i - m_x)^k p_i.$$

Нетрудно видеть, что дисперсия – это центральный момент второго порядка

$$\sigma^2 = \mu_2.$$

Свойства МО и дисперсии

- МО постоянной величины равно этой величине:

$$E(a) = a.$$

- МО суммы случайных величин:

$$E\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i E(X_i).$$

- МО произведения **независимых** случайных величин:

$$E(X_1 \cdot X_2) = E(X_1) \cdot E(X_2).$$

- Дисперсия постоянной величины:

$$D(a) = 0.$$

- Дисперсия масштабированной случайной величины:

$$D(aX) = a^2 D(X).$$

- Дисперсия суммы случайной величины и константы:

$$D(a + X) = D(X).$$

- Дисперсия линейной комбинации *независимых* случайных величин:

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 D(X_i).$$

Дополнительные характеристики вероятностных распределений

Коэффициент асимметрии – величина, характеризующая асимметрию распределения случайной величины

$$\gamma_1 = \mu_3 / \sigma^3.$$

Коэффициент асимметрии положителен, если правый хвост длиннее левого (рис. 1.6), и отрицателен в противном случае. Если распределение симметрично (например, нормальное распределение), то коэффициент асимметрии равен нулю.

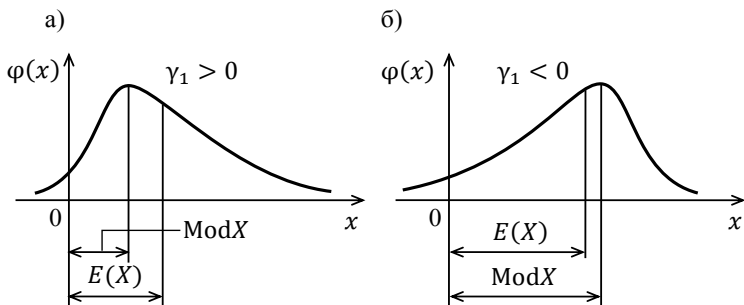


Рис. 1.6. Асимметрия: а) положительная; б) отрицательная

Коэффициент эксцесса (коэффициент островершинности) в теории вероятностей – мера остроты пика распределения случайной величины.

$$\gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

«Минус три» в конце формулы введено для того, чтобы коэффициент эксцесса нормального распределения был равен нулю. Он положителен, если пик распределения около математического ожидания острый, и отрицателен, если пик гладкий (рис. 1.7).

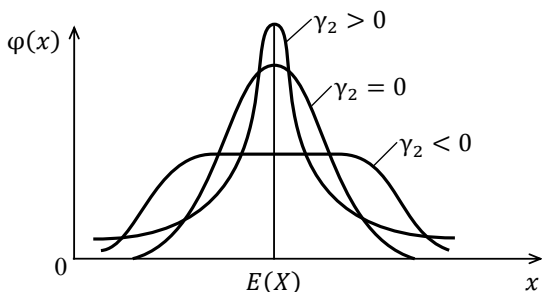


Рис. 1.7. Аксцесса

Медиана (от лат. media – средняя) – одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины. Для случайной величины, имеющей строго монотонную функцию распределения $F(x)$ медиана определяется как единственный корень уравнения $F(x) = 1/2$ и в общем случае определяется неоднозначно, а иногда не существует. В симметричном случае медиана совпадает с модой и математическим ожиданием, если последнее существует. Медиана употребляется реже, чем математическое ожидание, и чаще, чем мода.

Мода (от лат. m du – мера, способ, правило) – одна из числовых характеристик распределения вероятностей случайной величины; для случайной величины, имеющей плотность вероятностей $f(x)$, определяется как *любая точка локального максимума $f(x)$* . Мода определяется и для распределений, не имеющих плотности, например, мода *дискретной случайной величины – любое ее значение, имеющее вероятность, равную максимальной вероятности*. Иногда под модой случайной величины ξ понимают точку, где достигается *абсолютный максимум* ее плотности вероятности (главное значение моды, обозначаемое $\text{Mod } \xi$).

Распределения с одной, двумя или большим числом мод называются соответственно унимодальными (одновершинными), бимодальными или мультимодальными.

Унимодальные распределения. В теории вероятностей и математической статистике наиболее используемыми являются унимодальные распределения. Для унимодальных распределений, *симметричных* относительно некоторой точки a , мода равна a и совпадает с медианой и математическим ожиданием, если последнее существует.

Если распределение случайной величины ξ унимодально и непрерывно, то для любого $\varepsilon > 0$

$$P(|\xi - \text{Mod } \xi| \geq \varepsilon \tau) \leq \frac{4}{9\varepsilon^2},$$

где $\text{Mod } \xi$ – мода случайной величины ξ , а $\tau^2 = E|\xi - \text{Mod } \xi|$.

1.2. Распределения дискретных случайных величин

1.2.1. Вырожденное распределение

Случайная величина имеет вырожденное распределение в точке $c \in \mathbb{R}$ (рис. 1.8), если ξ принимает единственное значение $\xi = c$ с вероятностью 1, т. е. $P(\xi = c) = 1$. Функция распределения ξ имеет вид:

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < c; \\ 1, & x \geq c. \end{cases}$$

1.2.2. Распределение Бернулли

Случайная величина ξ (состояние некоторого элемента ЭЭС, например генератора) имеет распределение Бернулли с параметром p , если ξ принимает два значения 1 (работа) и 0 (отказ) с вероятностями соответственно p и $q = 1 - p$ (рис. 1.9).

Функция распределения случайной величины ξ с распределением Бернулли (рис. 1.10):

$$F_{\xi}(x) = P(\xi < x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ q = 1 - p, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

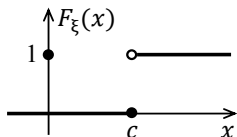


Рис. 1.8. ФР вырожденного распределения

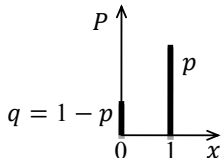


Рис. 1.9. Вероятности распределения Бернулли

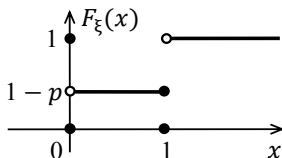


Рис. 1.10. Функция распределения Бернулли

Принято говорить, что событие $\xi = 1$ соответствует «успеху», а $\xi = 0$ – «неудаче». Эти названия условные и в зависимости от конкретной задачи могут быть заменены на противоположные.

Моменты распределения Бернулли

$$\begin{aligned}m &= 0 \cdot q + 1 \cdot p = p; \\ \sigma^2 &= M(\xi^2) - m^2 = 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - p^2 = pq; \\ m_n &= M(\xi^n) = p^n, \quad \forall n \in N.\end{aligned}$$

Схема Бернулли. Последовательность $\{X_k, k = 1, \dots, \infty\}$ независимых случайных величин, имеющих распределение Бернулли, называется схемой Бернулли. Физически схема Бернулли моделирует многократное проведение независимых реализаций одного и того же случайного эксперимента с двумя исходами: успех и неудача. Случайное событие $X_k = 1$ соответствует успеху в результате испытания k , а событие $X_k = 0$ соответствует неудаче.

Число «удач» в n испытаниях можно рассматривать как сумму из n независимых случайных величин, каждая из которых имеет распределение Бернулли. Принимая во внимание, что МО и дисперсия суммы независимых случайных величин равны сумме МО и дисперсий составляющих, имеем

$$m_n = M(n\xi) = np; D_n = D(n\xi) = npq.$$

На основе распределения Бернулли строятся статистические выводы (проверка гипотезы о том, что случайная величина подчиняется нормальному распределению). Многие процессы можно рассматривать как сложные на базе бинарных, где отдельное составное событие имеет два исхода – $\{\text{«да»}, \text{«нет»}\}$. И здесь полезно использование распределения Бернулли.

Сумма *независимых* n случайных величин с распределением Бернулли асимптотически стремится к нормальному распределению с МО $m = np$ (сумма МО) и дисперсией $\sigma^2 = npq$ (сумма дисперсий).

Пример. В энергосистеме 1000 выключателей с вероятностью отказа $q = 0,01$. МО числа отказов выключателей $m = np = 10$ и примерно такой же дисперсией $\sigma^2 = npq = 10 \cdot 0,99 = 9,9$.

1.2.3. Биномиальное распределение

Классическим примером применения биномиального распределения является определение вероятности наличия точно k черных шаров в выборке из n шаров, взятой из непрозрачного ящика, где известно процентное содержание черных шаров. В электроэнергетике биномиальное распределение наиболее широкое применение получило при описании числа аварийно отключенных генераторов.

Часто используемое в теории вероятности понятие «успеха» (появление некоторого события) в применении к отказам генераторов

вряд ли удачно. Здесь более уместно говорить просто о событии с заданной вероятностью. При этом для обозначения вероятности «отрицательного» (редкого события), как правило, используется символ q вместо $p = 1 - q$.

Вероятность $q(n, k)$ совместного отказа k элементов в группе из n элементов при одинаковой вероятности q независимого отказа одного элемента выражается формулой:

$$q(n, k) = C_n^k q^k p^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} q^k p^{n-k}, \quad (1.14)$$

где $p = 1 - q$ – вероятность безотказной работы элемента; C_n^k – число сочетаний из n элементов по k .

Представленное выражение является отражением общего члена биномиального разложения по степеням q , т. е.:

$$(q + p)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k q^k p^{n-k} = 1. \quad (1.15)$$

Обычно для определения вероятностей биномиального распределения используется рекуррентное соотношение:

$$q(n, k) = q(n, k-1) \frac{n-k+1}{k} \frac{q}{p}. \quad (1.16)$$

Математическое ожидание случайной величины (число отказов, каждый из которых имеет вероятность q), описываемой биномиальным распределением: $m = nq$. **Дисперсия:** $\sigma^2 = npq$.

В качестве примера в табл. 1.2 приведены вероятности $q(n, k)$ аварийного отключения k блоков в системе из четырех агрегатов мощностью 50 МВт с $q = 0,04$ и $q = 0,1$. Функцию распределения характеризует накопленная вероятность $Q(n, k) = \sum_{i=1}^k q(n, i)$ – вероятность того, что число отказавших блоков не больше k .

Таблица 1.2

Биномиальное распределение

Число отказов	Потеря мощности, МВт	$q = 0,04$		$q = 0,1$	
		$q(n, k)$	$Q(n, k)$	$q(n, k)$	$Q(n, k)$
0	0	0,8443	0,8493	0,6561	0,6561
1	50	0,1416	0,9909	0,2916	0,9477

Число отказов	Потеря мощности, МВт	$q = 0,04$		$q = 0,1$	
		$q(n, k)$	$Q(n, k)$	$q(n, k)$	$Q(n, k)$
2	100	$8,847 \cdot 10^{-3}$	0,9997	0,0486	0,9963
3	150	$2,458 \cdot 10^{-4}$	0,999998	$3,6 \cdot 10^{-3}$	0,9999
4	200	$2,56 \cdot 10^{-6}$	1,0	$1 \cdot 10^{-4}$	1,0

В частности, для $k = 1$, $q = 0,04$ имеем $q(4, 1) = 4 \cdot 0,04 \cdot 0,96^3 = 0,1416$.

При $k = 2$: $q(4, 2) = 6 \cdot 0,04^2 \cdot 0,96^2 = 0,0088$.

Из табл. 1.2 видно, что $q(n, k)$ убывает экспоненциально. Однако для больших n форма графика меняется и становится колоколообразной (рис. 1.11). В теории вероятности доказано, что биномиальное распределение при $n \rightarrow \infty$ является асимптотически нормальным с математическим ожиданием $M = nq$ и дисперсией $D = npq$ (предельная теорема Муавра – Лапласа). Замена биномиального распределения нормальным не приводит к большой погрешности, если $D \geq 9$.

Для практических целей часто желательно знать наиболее вероятное значение случайной величины (мода). Вероятность биномиального распределения имеет наибольшее значение, когда k равна целой части произведения $(n + 1)q$. Если это произведение является целым, то максимум вероятности наблюдается и для предыдущего значения k . В приведенном на рис. 1.11 примере при $n = 20$ и $q = 0,1$ наиболее вероятное число отключенных блоков $\text{Mod } X = \text{int}(21 \cdot 0,1) = 2$, а при $n = 40$ $\text{Mod } X = 4$. На рис. 1.12 мода соответствует $\text{Mod } X = 4$; 5. Отличие от нуля наиболее вероятной величины определяет необходимость учета кратных отказов элементов ЭЭС. Сверх того, только такие отказы и представляют интерес в теории надежности ЭЭС, поскольку энергосистема проектируется таким образом, что любой единичный отказ, как правило, не приводит к нарушению ее функционирования (критерий « $n - 1$ »).

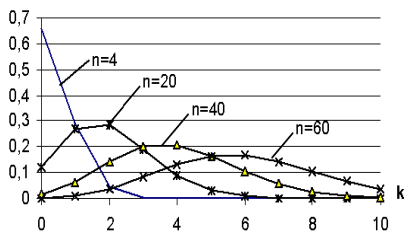


Рис. 1.11. Биномиальное распределение



Рис. 1.12. Мода биномиального распределения

Биномиальное распределение обладает еще одним интересным с практической точки зрения свойством. Если $q > n/(n+1)$, то последовательность $q(n, k)$ является монотонно возрастающей, а при $q < 1/(n+1)$ она монотонно убывает (на рис. 1.11 при $q = 0,04$, $n = 4$, $q = 0,04 < 1/5$). Приведенные соотношения могут служить ориентиром при выборе аппроксимирующего распределения.

Биномиальное распределение нескольких групп элементов строится исходя из соотношения, подобного (1.15):

$$\prod_{i=1}^N (p_i + q_i)^{n_i} = \prod_{i=1}^N \sum_{k=0}^{n_i} C_{n_i}^k q_i^k p_i^{n_i-k} = 1. \quad (1.17)$$

Отсюда комбинированная вероятность того, что в группе $i = 1, \dots, N$ произошел отказ k_i элементов:

$$Q = \prod_{i=1}^N C_{n_i}^{k_i} q_i^{k_i} p_i^{n_i-k_i}.$$

Пример 1.1. Пусть на электростанции ЭС₁ установлено 5 генераторов мощностью по 100 МВт с вероятностью отказа $q_1 = 0,1$, а на электростанции ЭС₂ – 4 генератора мощностью по 200 МВт с вероятностью отказа $q_1 = 0,08$. Определить вероятность отключения генерации мощностью 300 МВт.

Решение. Отключение заданной генерации возможно при отключении либо трех генераторов на ЭС₁, либо одного генератора на ЭС₁ и одного на ЭС₂. При этом

$$\begin{aligned} Q &= C_5^3 q_1^3 p_1^2 + C_5^1 q_1 p_1^4 \cdot C_4^1 q_2 p_2^3 = \\ &= 10 \cdot 0,1^3 \cdot 0,9^2 + (5 \cdot 0,1 \cdot 0,9^4) \cdot (4 \cdot 0,08 \cdot 0,92^3) = 0,0898. \end{aligned}$$

Пример 1.2. Пусть требуется определить оптимальное число запасных выключателей в ЭЭС с общим числом выключателей n , если известны вероятность q отказа выключателя, стоимость c_0 складского хранения запасного выключателя и ущерб u_0 от задержки замены выключателя при отсутствии запасного. В качестве критерия оптимизации здесь уместно принять минимум МО затрат $Z(x)$ на складирование и компенсацию ущерба. При x запасных выключателях:

$$Z(x) = xc_0 + u_0 \sum_{k=x+1}^n (k-x) P(n, k). \quad (1.18)$$

При $u_0 \leq c_0$ решение оптимизационной задачи тривиально – складирование не имеет смысла ($x = 0$). При $u_0 > c_0$ целесообразно иметь по крайней мере один запасной выключатель. Обобщая, можно предположить, что число запасных выключателей должно быть не менее МО отказов ($x \geq nq$) и не более чем на два стандартных отклонения превышать МО (инженерный критерий), $x \leq nq + 2\sqrt{nq(1-q)}$. Реализация формулы (1.18) на ЭВМ не представляет затруднений. При вычислении суммы здесь целесообразно использовать рекуррентное соотношение (1.15). Оптимальное значение x можно получить методами дискретной оптимизации, например делением отрезка пополам.

1.2.4. Распределение Пуассона

При малых вероятностях событий биномиальное распределение почти совпадает с однопараметрическим распределением Пуассона. Здесь вероятность появления случайной целочисленной величины x определяется по относительно простой, не требующей вычисления числа сочетаний формуле:

$$P(x) = \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda}.$$

Математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона определяются параметром λ : $M = D = \lambda$. Условие равенства (с допустимой погрешностью) МО и дисперсии может служить критерием для правомочности замены биномиального распределения распределением Пуассона.

Приравнявая математические ожидания распределений Пуассона и биномиального, получаем условие для аппроксимации:

$$\lambda = nq.$$

При этом

$$q(n, k) \approx \frac{(nq)^k}{k!} e^{-nq}.$$

Для сопоставления в табл. 1.3 приведены распределения: биномиальное и Пуассона ($n = 20$, $q = 0,001$ и $0,1$).

Нетрудно видеть, что рассматриваемые распределения практически совпадают. В то же время при больших k относительная погрешность становится столь значительной (при $k = 20$ это $1,6 \cdot 10^7 \%$), что если интерес представляет именно область малых вероятностей, то аппроксимация становится просто недопустимой. Здесь следует отметить, что реально нас интересуют вероятности не ниже 10^{-6} , а в этом диапазоне погрешность относительно невелика.

Таблица 1.3

Сопоставление распределений: биномиального и Пуассона

k	$q = 0,001$			$q = 0,1$		
	Биномиальное	Пуассона	Ошибка, %	Биномиальное	Пуассона	Ошибка, %
0	0,980	0,980	0	0,121	0,135	-11
1	0,020	0,020	0	0,270	0,271	0
2	$1,87 \cdot 10^{-4}$	$1,96 \cdot 10^{-4}$	-5	0,285	0,271	5
3	$1,12 \cdot 10^{-6}$	$1,31 \cdot 10^{-6}$	-17	0,190	0,1801	5
4	$4,77 \cdot 10^{-9}$	$6,53 \cdot 10^{-9}$	-37	0,09	0,090	0
5	$1,53 \cdot 10^{-11}$	$2,61 \cdot 10^{-11}$	-71	0,032	0,0361	-13
6	$3,82 \cdot 10^{-14}$	$8,71 \cdot 10^{-14}$	-128	0,009	0,0121	-36

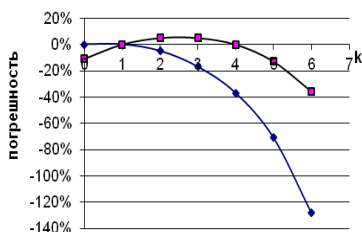


Рис. 1.3. Ошибки аппроксимации БР распределением Пуассона

При больших n биномиальное распределение (БР) практически неприемлемо для практических расчетов (как вычислить число сочетаний из n по m ?). Здесь просто необходима аппроксимация БР распределениями Пуассона или нормальным. Представляет интерес поведение ошибки аппроксимации распределением Пуассона (рис. 1.13). Нетрудно видеть, что

она подчинена некоторой функциональной зависимости, и если известна ее аналитическая структура (например, полином или лучше экспонента), то возможна дополнительная коррекция аппроксимирующей функции.

Рассмотрим задачу о выключателях (п. 1.2.2). При $n = 1000$ с вероятностью отказа выключателя $q = 0,01$ МО числа отказов выключателей $m = nq = 10$ и примерно такой же дисперсией $\sigma^2 = npq = 1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 \approx 10$. Поскольку МО и дисперсия числа отказов выключателей примерно одинаковы, то для числа отказов можно применить распределение Пуассона с $\lambda = m = 10$. Определим вероятность отказа пяти выключателей

$$P = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-k} = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = 0,0388.$$

Как правило, распределение Пуассона описывает закономерности появления внезапных отказов в сложных системах. Оно используется также при моделировании ФР нескольких групп генераторов с отличающимися параметрами. Так для групп генераторов с параметрами $\{n_j, q_j, P_j, \dots, \lambda_j = n_j q_j, j = 1, \dots\}$, где P_j – мощность генератора группы j , функция распределения отключенной мощности может быть представлена в виде формулы, часто называемой формулой сложной суммы:

$$F(x) = \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_L} \frac{\lambda_1^{k_1}}{k_1!} \frac{\lambda_2^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{\lambda_L^{k_L}}{k_L!} e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_L)}, \sum_{j=1} k_j P_j < x.$$

Здесь вероятность отказа k_i генераторов группы i моделируется распределением Пуассона. Несмотря на то что формула называется сложной, расчеты по ней существенно проще, нежели расчеты с использованием (1.17). Однако снижение трудоемкости связано с увеличением погрешности, особенно в области маловероятных событий.

Для сопоставления распределений рассмотрим приведенный выше пример. Согласно условиям $\lambda_1 = n_1 q_1 = 5 \cdot 0,1 = 0,5$, $\lambda_2 = n_2 q_2 = 4 \cdot 0,08 = 0,32$. Применяя распределение Пуассона, получаем

$$Q = \frac{0,5^3}{3!} e^{-0,5} + \frac{0,5^3}{1!} e^{-0,5} \cdot \frac{0,32^3}{1!} e^{-0,32} =$$

$$= e^{-0,5} \left(\frac{0,5^3}{6} + 0,5 \cdot 0,32 e^{-0,32} \right) = 0,083,$$

что близко к результату $Q = 0,0898$ (погрешность 7,5 %). Реально вероятности отказов элементов ЭЭС значительно меньше, что дает основание рекомендовать распределение Пуассона для практического использования в моделях с отказами оборудования.

Распределение Пуассона иногда называют распределением редких событий. Примерами переменных, распределенных по закону Пуассона, могут служить: число несчастных случаев, число дефектов в производственном процессе и т. п.

Распределение Пуассона связано с показательным распределением и с распределением Бернулли. Если число событий имеет распределение Пуассона, то интервалы между событиями имеют экспоненциальное или показательное распределение.

Характеристики параметров распределений Бернулли, биномиального и Пуассона представлены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Сводная таблица параметров дискретных распределений

Параметр	Распределение Бернулли	Биномиальное распределение	Распределение Пуассона
Носитель	$k = \{0, 1\}$	$k = \{0, 1, \dots, n, \}$	$k = \{0, 1, \dots\}$
Функция вероятности	$f(k) = \begin{cases} q, & k = 0; \\ p, & k = 1 \end{cases}$	$p_k = C_n^k p^k q^{n-k}$	$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$
МО	p	np	λ
Мода	$\max(p, q)$	$x_{\text{mod}} \geq p(n+1) - 1,$ $x_{\text{mod}} \leq p(n+1)$	—
Дисперсия, σ^2	pq	npq	λ
Асимметрия, γ_1	$(q-p)/\sqrt{pq}$	$(q-p)/\sqrt{npq}$	$1/\sqrt{\lambda}$
Эксцесс, γ_2	$(1-6pq)/pq$	$(1-6pq)/npq$	$1/\lambda$

1.3. Распределения непрерывных случайных величин

В теории вероятностей значительное внимание уделяется таким законам распределения, как равномерное, нормальное, экспоненциальное, Вейбулла, гамма (табл. 1.5). Не показанные в таблице аналитические выражения $\lambda(x)$ имеют громоздкую структуру и вычисляются либо через показанные функции, либо путем их интегрирования или дифференцирования согласно определению рассматриваемой величины.

Таблица 1.5

Функции распределения

Распределение	$F(x), R(x)$	$f(x)$	$\lambda(x)$	МО	Дисперсия	Примечание
Нормальное	$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{(x-m)/\sigma} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	–	m	σ^2	Для $\forall x$
Экспоненциальное	$R(x) = \exp(-\lambda x)$	$\lambda \exp(-\lambda x)$	λ	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$x \geq 0$
Вейбулла	$R(x) = \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha \beta (\beta x)^{\alpha-1} \exp(-(\beta x)^\alpha)$	$\alpha \beta (\beta x)^{\alpha-1}$	$\frac{1}{\beta} \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$	–	$x \geq 0$
Гамма	$F(x) = \gamma(\beta x, \alpha)$	$\frac{\beta (\beta x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta x}$	–	$\alpha \frac{1}{\beta}$	$\alpha \frac{1}{\beta^2}$	$x \geq 0$
Эрланга	$R(x) = \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!} e^{-\beta x}$	$\frac{\beta (\beta x)^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\beta x}$	$\frac{(\beta x)^{a-1}}{(a-1)! \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\beta x)^r}{r!}}$	$a \frac{1}{\beta}$	$a \frac{1}{\beta^2}$	a – целое $a > 0$

В приведенных выражениях $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$ – гамма-функция; $\gamma(t, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{t-1} e^{-u} du$ – неполная гамма-функция.

1.3.1. Равномерное распределение

Равномерное распределение полезно при описании переменных, у которых каждое значение равновероятно, иными словами, значения переменной равномерно распределены в некоторой области.

В технике чаще всего равномерное распределение применяют для моделирования интегралов по времени (например, потери энергии), где все моменты времени равновероятны на рассматриваемом периоде. Другим примером является распределение погрешности измерения, которое во многих случаях также принимается равномерным. Третья, широко известная область применения равномерного закона распределения – генерация псевдослучайных чисел и связанное с ними статистическое (имитационное) моделирование.

Ниже приведены формулы плотности и функции распределения равномерной случайной величины, заданной на отрезке $[a, b]$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b; \\ 0, & x < a, x > b; \end{cases}$$
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a; \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Из этих формул легко понять, что вероятность того, что равномерная случайная величина принадлежит отрезку $[c, d]$, равна $(d - c)/(b - a)$.

График равномерной плотности вероятности, сосредоточенной на отрезке $[0, 1]$, показан на рис. 1.14.

Числовые характеристики равномерного закона:

- среднее, медиана: $E\xi = x_{\text{med}} = (a + b)/2$;
- дисперсия: $D\xi = (a - b)^2/12$;
- асимметрия: $\gamma_1 = 0$;
- эксцесс: $\gamma_2 = -1, 2$.

1.3.2. Нормальное распределение (распределение Гаусса)

Большинство случайных величин (например, мощность нагрузки энергосистемы) описывается нормальным распределением (НР). Визуально график плотности НР – это колоколообразная кривая (рис. 1.15). Как правило, НР применяется к таким случайным величинам,

которые зависят от большого числа случайных факторов или представляют сумму большого числа случайных величин. В теории вероятности доказано (**центральная предельная теорема Ляпунова**), что независимо от вида распределений составных событий распределение результирующего события будет асимптотически приближаться к нормальному по мере увеличения числа составных событий. НР является асимптотически предельным для большинства непрерывных распределений (гамма-, Стюдента и др.).

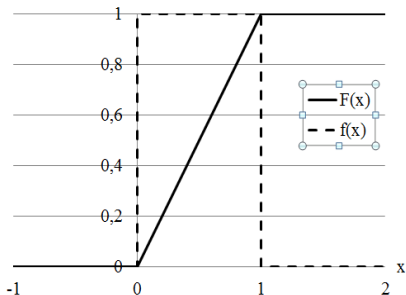


Рис. 1.14. Равномерное распределение

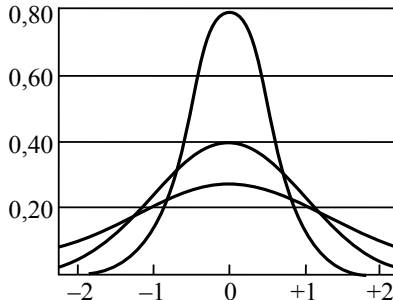


Рис. 1.15. Плотность нормального распределения с разными СКО

Широко известен порожденный НР критерий «двух или трех сигм», согласно которому случайная величина практически не отклоняется от своего математического ожидания на величину, большую трех среднеквадратичных отклонений (СКО) σ . При использовании данного критерия вероятность отклонения на величину, большую 2σ (3σ), составляет 4,55 (0,27) %, чем часто можно пренебречь.

В инженерной практике значимость НР несколько преувеличена. Часто его используют там, где более уместным было бы применение иного распределения. Следует тщательно, по известным из теории вероятности критериям, проверять допустимость использования НР для описания рассматриваемых случайных величин. Функция интенсивности (риска) нормального распределения имеет возрастающий характер, следовательно, данным распределением можно описывать длительность безотказной работы стареющих элементов.

Нормальное распределение дает хорошую модель для реальных явлений, в которых:

- 1) имеется сильная тенденция данных группироваться вокруг центра;

- 2) положительные и отрицательные отклонения от центра равновоятны;
- 3) частота отклонений быстро падает, когда отклонения от центра становятся большими.

Нормальное распределение особенно часто используется в статистике. Одно из наиболее полезных приложений нормального распределения – его применение для описания средней величины статистической выборки.

Плотность нормального распределения ($X \sim N(m, \sigma^2)$) (см. рис. 1.15):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right),$$

где m и σ^2 – параметры закона, интерпретируемые соответственно как среднее значение и дисперсия рассматриваемой случайной величины. Нормальный закон с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$ называется стандартным.

Основные характеристики нормального закона:

- среднее, мода, медиана: $\mu = x_{\text{mod}} = x_{\text{med}} = m$;
- асимметрия и эксцесс, а также все нечетные центральные моменты порядка 3 и выше равны нулю;
- все четные центральные моменты порядка $2k$ определяются по формуле

$$\mu_{2k} = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k - 1) \sigma^{2k}. \quad (1.19)$$

В частности $\mu_2 = \sigma^2$, $\mu_4 = 3\sigma^4$.

Приведем некоторые полезные свойства нормального распределения.

Плотность нормального распределения симметрична относительно среднего. Среднее нормального распределения совпадает с медианой и модой. В предельном случае нулевой дисперсии случайная величина вырождается и принимает единственное значение, равное среднему.

Как известно, независимые случайные величины X , Y имеют равный нулю коэффициент корреляции. Обратное утверждение в общем случае не справедливо, т. е. равенство нулю корреляционного момента $\text{cov}(X, Y)$ еще не говорит о независимости случайных величин X и Y . Для нормальных случайных величин обратное утверждение является справедливым, т. е. необходимым и достаточным при-

знаком независимости двух нормальных случайных величин X и Y является равенство нулю коэффициента корреляции.

В электроэнергетике нормальным распределением описываются, например, нагрузка, измерения электрических параметров и др.

Под влиянием работ Гаусса и Лапласа долгое время считалось едва ли не аксиомой, что почти все статистические распределения должны приближаться к нормальному как к идеальной предельной форме. Отклонение случайной величины от ее среднего рассматривалось как ошибка, подчиненная «закону ошибок» с нормальным распределением.

Хотя такая точка зрения определенно преувеличивает роль нормального распределения, тем не менее в большом числе важных прикладных вычислений распределения принимаются как приблизительно нормальные.

Центральная предельная теорема

Причину широкого распространения нормального распределения объясняет центральная предельная теорема теории вероятностей. Эта теорема имеет различные формулировки, мы ограничимся одной из них, которая принадлежит А. М. Ляпунову и справедлива для последовательности независимых случайных величин.

Теорема Ляпунова доказывает, что *сумма независимых случайных величин $S_n = \sum X_i$, нормированная своим МО и дисперсией*

$$S = (S_n - M(S_n))/\sigma(S_n),$$

с увеличением n стремится к стандартной нормальной величине $S \sim N(0, 1)$ при любых законах распределения исходных величин и выполнении следующего условия: среди случайных величин X_i не должно быть одной или нескольких доминирующих, т. е. исключение любой составляющей X_i не должно существенно влиять на случайную величину S_n .

Чтобы привести точную математическую формулировку теоремы Ляпунова, необходимо подобрать достаточно просто проверяемый критерий отсутствия одной или нескольких доминирующих компонент в сумме S_n . Такой критерий представляет собой так называемая «дробь Ляпунова», образованная дисперсией $\sigma^2(S_n)$ и центральными третьими моментами исходных случайных величин $\mu_3 = M(X_i - \mu_i)^3$.

Дробь Ляпунова определяется формулой

$$\alpha_n = \frac{\sum_{i=1}^n \mu_{3i}}{\sigma^3(S_n)}.$$

Для выполнения теоремы Ляпунова необходимо, чтобы дробь Ляпунова при увеличении n стремилась к нулю (к нулю стремится асимметрия результирующего распределения). Кроме того, необходимо, чтобы все вторые и третьи центральные моменты случайных величин X_i были равномерно ограничены, т. е. должно найтись одно достаточно большое число A , для которого выполняются неравенства: $\sigma^2(X_i) < A$; $\mu_{3i} < A$, $i = 1, \dots, n$.

Центральная предельная теорема дает теоретическое объяснение широкому распространению и важности нормального распределения. В заключение процитируем следующее юмористическое утверждение [13]: «Каждый уверен в справедливости закона ошибок (нормального распределения): экспериментаторы – потому что они думают, что это математическая теорема, математики – потому что они думают, что это экспериментальный факт».

1.3.3. Экспоненциальное (показательное) распределение

Экспоненциальное (показательное) распределение играет ключевую роль в теории надежности. Большинство математических моделей, относящихся к структурной надежности (СН) ЭЭС, основано на предположении об экспоненциальном характере функции распределения. Согласно табл. 1.1 дополнительная функция произвольного распределения описывается уравнением

$$F(x) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t) dt\right).$$

Экспоненциальное распределение отражает частный случай, когда $\lambda(t) = \lambda = \text{const}$. При этом

$$F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Основные значения экспоненциальной функции представлены в табл. 1.5. В частности, МО длительности безотказной работы

$$M(t) = \tau = 1/\lambda;$$

$$F(t) = e^{-\lambda t}.$$

Исходя из этого можно записать

$$F(t) = e^{-t/\tau},$$

т. е. это вероятность безотказной работы на интервале времени, выраженном в единицах τ (масштаб, единица времени).

Экспоненциальным распределением, как правило, описываются те элементы технических систем, отказы которых не зависят от характера и длительности предшествующей работы (период B , рис. 1.4), т. е. они возникают из-за появления непредвиденных нерасчетных ситуаций (КЗ, обрыв связи, случайный спрос на обслуживание, стихийное явление, диверсия и др.).

Имеют место события, которые на быденном языке можно назвать редкими. Если T – время между наступлениями редких событий, происходящих в среднем с интенсивностью λ , то величина T имеет экспоненциальное распределение с параметром λ .

Это распределение обладает очень интересным свойством отсутствия последействия, или, как еще говорят, марковским свойством, в честь знаменитого русского математика Маркова А. А., которое можно объяснить следующим образом. Если распределение между моментами наступления некоторых событий является показательным, то распределение, отсчитанное от любого момента t до следующего события, также имеет показательное распределение (с тем же самым параметром). Иными словами, для потока редких событий время ожидания следующего посетителя всегда распределено показательно независимо от того, сколько времени вы его уже ждали.

Показательное распределение связано с пуассоновским распределением: в единичном интервале времени количество событий, интервалы между которыми независимы и показательно распределены, имеет распределение Пуассона. *Если интервалы между КЗ имеют экспоненциальное распределение, то количество КЗ, например в течение года, распределено по закону Пуассона.*

Показательное распределение представляет собой частный случай распределения Вейбулла.

Если время дискретно, то аналогом показательного распределения является геометрическое распределение.

Плотность экспоненциального распределения описывается формулой:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, t \geq 0.$$

Это распределение имеет только один параметр λ , который и определяет его характеристики.

Основные числовые характеристики экспоненциального распределения представлены в табл. 1.6.

Числовые характеристики

Математическое ожидание	$E(X) = 1/\lambda$
Мода	0
Медиана	$x_{\text{med}} = \ln(2) / \lambda$
Дисперсия	$D(X) = 1/\lambda^2$
Асимметрия	$\beta_1 = 2$
Экссесс	$\beta_2 = 6$

1.3.4. Распределение Вейбулла

Распределение Вейбулла названо в честь шведского исследователя Валодди Вейбулла (Wal ddi Weibull), применявшего в 1951 г. это распределение в теории надежности для описания времен отказов разного типа.

Для реальных объектов функция интенсивности отказов имеет не постоянный, как у экспоненциального распределения, а корытообразный характер (рис. 1.4), где определяются три интервала: период отрицательного старения, где $\lambda(t)$ имеет ниспадающий характер, период $\lambda(t) \approx$ и период положительного старения, где $\lambda(t)$ возрастает во времени.

Дополнительная функция в распределении Вейбулла имеет вид

$$\mathcal{F}(t) = \exp(-(\beta t)^\alpha),$$

т. е. отличается от показательного только степенью произведения $(\beta t)^\alpha$. Изменением параметра α это распределение позволяет описать специфику всех трех периодов. При $\alpha = 1$ элемент не стареет (экспоненциальное распределение), при $\alpha < 1$ имеет место отрицательное, а при $\alpha > 1$ положительное старение.

В теории вероятности распределение Вейбулла известно как предельное распределение *минимальной из совокупности случайных величин* с одним и тем же распределением.

Плотность распределения Вейбулла: $t \in W(\beta, \alpha)$,

$$f(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1} \cdot \exp(-(\beta t)^\alpha), t \geq 0.$$

Часто параметры β и α называют параметрами масштаба (βt) и формы.

Обычно распределение Вейбулла сосредоточено на полуоси от 0 до бесконечности. Если вместо границы 0 ввести параметр a , что часто бывает необходимо на практике, то возникает так называемое **трехпараметрическое распределение Вейбулла**.

Как описывалось выше, экспоненциальное распределение часто используется как модель, оценивающая время наработки до отказа в предположении, что интенсивность отказа объекта постоянна. Если интенсивность отказа меняется с течением времени, применяется распределение Вейбулла.

При $\alpha = 1$ распределение Вейбулла переходит в экспоненциальное распределение, а при $\alpha = 2$ – в распределение Релея.

Функция интенсивности (риска)

$$\lambda(t) = \alpha\beta(\beta t)^{\alpha-1}.$$

При $\alpha = 1$ функция риска равна константе β . При $\alpha < 1$ функция риска убывает, что соответствует приработке устройства. При $\alpha > 1$ функция риска возрастает, что соответствует старению устройства. Характер функции риска в зависимости от параметра формы представлен на рис. 1.16. Типичные функции плотности распределения показаны на графиках рис. 1.17–1.19. Интересно отметить, что вид функции плотности распределения меняется от экспоненциальной (рис. 1.17, при $\lambda = 0,8$) до почти нормальной (рис. 1.19, при $\lambda = 5$), от положительной асимметрии (рис. 1.17, 1.18) к отрицательной (рис. 1.19).

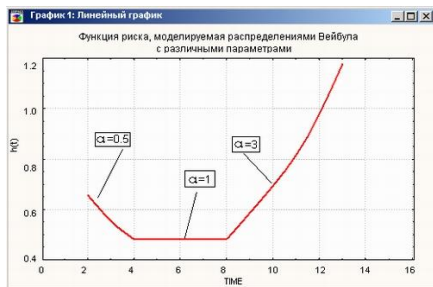


Рис. 1.16. Функция риска распределения Вейбулла

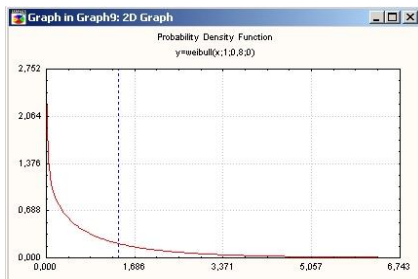


Рис. 1.17. Плотность распределения Вейбулла при $\lambda = 0,8$

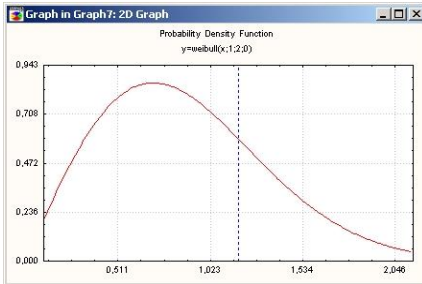


Рис. 1.18. Плотность распределения Вейбулла при $\lambda = 2$

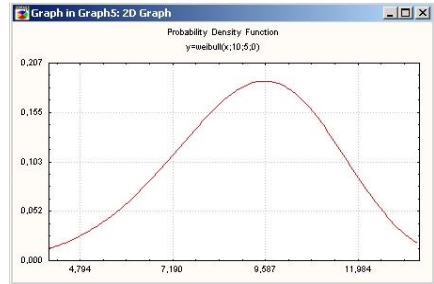


Рис. 1.19. Плотность распределения Вейбулла при $\lambda = 5$

1.3.5. Распределение Эрланга

Распределение Эрланга названо в честь А. Эрланга (A. Erlang), впервые применившего его в задачах теории массового обслуживания и телефонии.

В теории надежности показано, что если длительность одной стадии многостадийного процесса описывается экспоненциальным распределением с параметром λ , то длительность многостадийного процесса описывается распределением Эрланга с параметрами λ и a , основные функции которого представлены в табл. 1.5, где вместо λ записано β (часто используется).

Поскольку МО длительности одной стадии (единица времени) составляет $M = 1/\lambda$, а дисперсия $D = 1/\lambda^2$ (экспоненциальное распределение), то понятно, что в силу многостадийности процесса для распределения Эрланга эти величины должны быть в a раз больше:

$$m = \frac{a}{\lambda}; D = \frac{a}{\lambda^2}.$$

Распределение Эрланга имеет дополнительную функцию распределения

$$F(t, \lambda, a) = \sum_{r=0}^{a-1} \frac{(\lambda t)^r}{r!} e^{-\lambda t}. \quad (1.20)$$

Плотность распределения:

$$f(t, \lambda, a) = \frac{\lambda(\lambda t)^{a-1}}{(a-1)!} e^{-\lambda t}. \quad (1.21)$$

Данная функция похожа на распределение Пуассона числа событий

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Здесь λ – МО числа событий. Величину λt в (1.20) можно рассматривать как МО числа событий с экспоненциальным распределением и интенсивностью λ за время t . Действительно, МО межсобытийного периода составляет $\tau = 1/\lambda$. Отсюда МО числа событий за время t составляет $t/\tau = \lambda t$. Таким образом, функция (1.20) представляет вероятность появления за время t не более $a - 1$ события (стадии).

Важность класса распределений Эрланга вытекает из двух тесно связанных фактов. Первый – связь с экспоненциальным распределением (одной стадии), которое является частным случаем при $a = 1$; второй – простота преобразования Лапласа, о котором здесь не говорится, но которое в теории надежности и теории восстановления играет исключительно важную роль. Обладая математическим аппаратом преобразования Лапласа, можно достаточно просто получить решение многих задач надежности. В частности, преобразование Лапласа плотности экспоненциального распределения с параметром λ :

$$f_e^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s},$$

а преобразование Лапласа плотности распределения Эрланга:

$$f_{\varepsilon}^*(s) = \left(\frac{\lambda}{\lambda + s} \right)^a = (f_e^*(s))^a. \quad (1.22)$$

1.3.6. Гамма-распределение

Гамма-распределение отличается от распределения Эрланга тем, что параметр α здесь может принимать произвольные, а не только целочисленные значения. Учитывая свойства гамма-функций, нетрудно показать, что при целых α гамма-распределение совпадает с распределением Эрланга. Гамма-распределение является асимметричным, меняясь от экспоненциального при $\alpha = 1$ до нормального при $\alpha \rightarrow \infty$. *Асимметричность гамма-распределения определяет его универсальный характер.* Подбирая α и β , с его помощью можно достаточно точно описать реальный случайный процесс. В справочной литературе имеются таблицы гамма-распределения, однако возможность простой алгоритмической реализации распределения Эрланга позволяет выполнять расчеты функций гамма-распределения путем интерполяции распределения Эрланга по параметру α .

Плотность экспоненциального распределения имеет моду в точке 0, и это иногда неудобно для практических применений. Во мно-

гих примерах заранее известно, что мода рассматриваемой случайной переменной не равна 0, например, интервалы между КЗ имеют ярко выраженную моду. Для моделирования таких событий можно использовать двухпараметрическое гамма-распределение.

Функция распределения

$$F(x) = (\lambda x, \alpha),$$

где

$$\gamma(t, \alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t u^{\alpha-1} e^{-u} du; \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty u^{\alpha-1} e^{-u} du$$

соответственно неполная гамма-функция и гамма-функция Эйлера.

Плотность гамма-распределения имеет вид, совпадающий с (1.21) при целых α :

$$f(t, \lambda, \alpha) = \frac{\lambda(\lambda t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0, \quad (1.23)$$

где $\alpha > 0$ – параметр «формы» и $\lambda > 0$ – параметр масштаба. При целых α $\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)!$. Часто вместо параметра λ используется обратная величина $\beta = 1/\lambda$. В частном случае, при целых α гамма-распределение переходит в распределение Эрланга и экспоненциальное распределение ($\alpha = 1$). Основные характеристики гамма-распределения представлены в табл. 1.5. На рис. 1.21 приведены графики плотности гамма-распределения с некоторыми параметрами масштаба и формы.

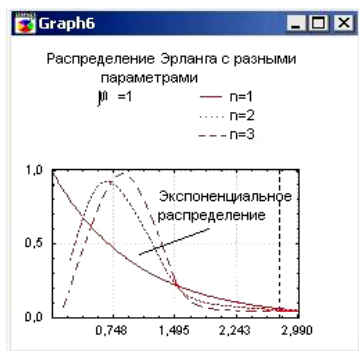


Рис. 1.20. Распределение Эрланга

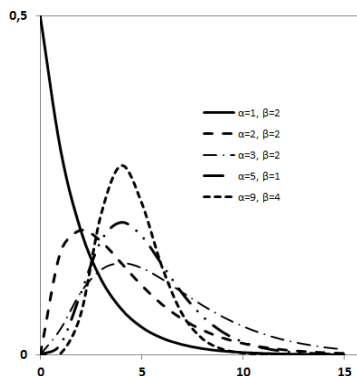


Рис. 1.21. Плотность гамма-распределения

Полезное свойство: сумма любого числа независимых гамма-распределенных случайных величин с отличающимися α_i и одинаковым параметром масштаба λ также подчиняется гамма-распределению, но с параметрами $\sum \alpha_i$ и λ .

Связь с другими распределениями

Если X_1, X_2, \dots, X_k – независимые экспоненциально распределенные случайные величины, $X_i \sim \exp(\lambda)$, то

$$Y = \sum_{i=1}^k X_i \sim \Gamma(1/\lambda, k).$$

Распределение хи-квадрат является частным случаем гамма-распределения:

$$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right).$$

Согласно центральной предельной теореме при больших k гамма-распределение $\Gamma(\beta, k)$ может быть аппроксимировано нормальным распределением:

$$\Gamma(\beta, k) \approx N(k\beta, k\beta^2), k \rightarrow \infty.$$

Если X_1, X_2, \dots, X_k – независимые случайные величины, такие что $X_i \sim \Gamma(1, k_i)$, то

$$\frac{X_1}{X_1 + X_2} \sim B(k_1, k_2).$$

1.3.7. Усеченное распределение

Функция усеченного интервалом (a, b) распределения

$$F_y(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{F(x) - F(a)}{F(b) - F(a)}, & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b, \end{cases}$$

где $F(x)$ – интегральная функция распределения.

Плотность усеченного распределения

$$f_y(x) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ \frac{f(x)}{F(b) - F(a)}, & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то математическое ожидание усеченного нормального распределения

$$\begin{aligned}
E(X) &= C \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b x \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \\
&= C \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\alpha^\beta (m + \sigma u) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \\
&= C [m(\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)) + \sigma(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))] = m - \sigma \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}.
\end{aligned}$$

где $\Phi(x)$ – нормированная ($m = 0$, $\sigma = 1$) функция НР;
 $C = 1/[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]$; $\beta = (b - m)/\sigma$; $\alpha = (a - m)/\sigma$.

При $\beta = \infty$ математическое ожидание

$$E = E(X) = m + \sigma \frac{\varphi(\alpha)}{1 - \Phi(\alpha)} = m + \sigma \lambda(\alpha),$$

где нормирующий множитель $\lambda(\alpha) = \varphi(\alpha)/[1 - \Phi(\alpha)]$.

Второй начальный момент усеченного НР

$$\kappa_2 = mE + \sigma^2 + (E - m)\alpha.$$

Дисперсия

$$D = \sigma^2 + (E - a)(m - E) = \sigma^2[1 - \lambda^2 - \lambda\alpha].$$

Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то МО усеченного интервалом (∞, b) распределения

$$E = E(X) = m - \sigma\lambda,$$

где

$$\lambda = \frac{\varphi(\beta)}{\Phi(\beta)}; \beta = \frac{(b - \mu)}{\sigma}.$$

Второй начальный момент

$$\kappa_2 = \mu E + \sigma^2 + (E - \mu)\beta.$$

Дисперсия

$$D = \sigma^2 - (\beta - E)(\mu - E).$$

Если $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, то МО усеченного интервалом (a, b) распределения

$$E = \mu - \sigma\lambda = \mu - \sigma \frac{\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)}.$$

Дисперсия

$$D = \sigma^2 \left(1 - \frac{\beta\varphi(\beta) - \alpha\varphi(\alpha)}{\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)} - \lambda^2 \right).$$

Математическое ожидание редуцированного нормального распределения

Пусть описываемая НР случайная величина $X \sim N(m, \sigma^2)$ редуцирована на отрезке $[a, b]$ и ее ФР имеет вид, показанный на рис. 1.22.

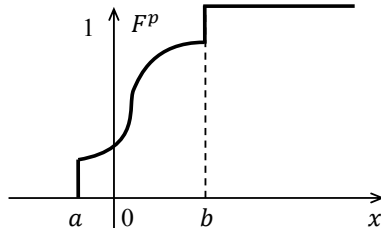


Рис. 1.22. Редуцированная функция распределения

Функция редуцированного интервалом (a, b) НР:

$$F^p(x, a, b) = \begin{cases} 0, & x < a; \\ F(x), & a \leq x < b; \\ 1, & x \geq b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия редуцированного нормального распределения могут быть представлены через параметры НР и пределы редуцирования. Математическое ожидание определяется выражением

$$\begin{aligned} M^p &= E(m, D, a, b) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x dF^p(x) = aF(a) + b[1 - F(b)] + \int_a^b x dF(x). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Здесь идентификация $E(m, D, a, b)$ используется, когда необходимо подчеркнуть параметры исходного распределения и пределы редуцирования.

Принимая во внимание, что исходное распределение является нормальным, интеграл в правой части может быть записан в виде

$$\begin{aligned} J &= \mu(m, D, a, b) = \int_a^b x dF(x) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_a^b x \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right] dx. \end{aligned}$$

После замены переменной $u = (x - m)/\sigma$ (нормирование случайной величины) получаем

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} (m + \sigma u) \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du,$$

где $\alpha = (a - m)/\sigma$; $\beta = (b - m)/\sigma$. Отсюда

$J = \mu(m, D, a, b) = m[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + \sigma[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)],$ (1.25)
 где $\Phi(x)$, $\varphi(x)$ – интегральная функция и плотность нормированного (стандартного) нормального распределения. Суммируя, в итоге получаем

$$M^p = a\Phi(\alpha) + b[1 - \Phi(\beta)] + m[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + \sigma[\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)]. \quad (1.26)$$

Это выражение можно распространить на ненормированное нормальное распределение:

$$M^p = aF(a) + b[1 - F(b)] + m[F(b) - F(a)] + \sigma^2[f(a) - f(b)]. \quad (1.27)$$

Дисперсия редуцированного нормального распределения

Выполняя математические преобразования, подобные тем, что использовались при выводе МО, получаем формулу для расчета дисперсии:

$$D^p = a^2\Phi(\alpha) + b^2[1 - \Phi(\beta)] - M^{p^2} + m^2[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)] + 2m\sigma[\varphi(\alpha) - \varphi(\beta)] + \sigma^2[\alpha\varphi(\alpha) - \beta\varphi(\beta) + \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)]. \quad (1.28)$$

Это выражение можно распространить на ненормированное нормальное распределение:

$$D^p = a^2F(a) + b^2[1 - F(b)] - M^{p^2} + m^2[F(b) - F(a)] + 2m\sigma^2[f(a) - f(b)] + \sigma^2[(a - m)f(a) - (b - m)f(b) + F(b) - F(a)]. \quad (1.29)$$

1.4. Многомерные случайные величины

Если результат опыта описывается не одной, а целой группой случайных величин $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, определенных на одном и том же вероятностном пространстве Ω , то в этом случае говорят о многомерной случайной величине $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ (например, вектор мощностей в узлах электрической сети).

Функцией распределения многомерной случайной величины называют следующую функцию действительных переменных t_1, t_2, \dots, t_n :

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = P(X_1 < t_1, X_2 < t_2, \dots, X_n < t_n).$$

Если функция $F(t_1, t_2, \dots, t_n)$ является непрерывно дифференцируемой до порядка n включительно, то плотность распределения

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\partial^n F(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_1 \partial t_2 \dots \partial t_n}.$$

При этом

$$F(t_1, t_2, \dots, t_n) = \int_{-\infty}^{t_1} \dots \int_{-\infty}^{t_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n) d\bar{t}, \quad (1.30)$$

где $d\bar{t} = dt_1 dt_2 \dots dt_n$.

Данное соотношение позволяет определить *условные плотности распределения*

$$f(t_i) = \int_{t_1=-\infty}^{\infty} \dots \int_{t_j \neq t_i}^{\infty} \dots \int_{t_n=-\infty}^{\infty} f(t_1, t_2, \dots, t_n) d\bar{t}.$$

Случайные величины X_1 и X_2 называются независимыми (п. 1.1.3), если $P[X_1|X_2] = P[X_1]$. В частности, при независимых X_1 и X_2 для любых произвольно заданных интервалов (a_1, b_1) и (a_2, b_2) события $(a_1 \leq x_1 < b_1)$ и $(a_2 \leq x_2 < b_2)$ оказываются независимыми. Для таких событий вероятность

$$\begin{aligned} P[(t_1 \leq X_1 < t_1 + \Delta t) \cap (t_2 \leq X_2 < t_2 + \Delta t)] = \\ = P(t_1 \leq X_1 < t_1 + \Delta t) \cdot P(t_2 \leq X_2 < t_2 + \Delta t). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для независимых событий

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i).$$

Пример. Пусть функция двумерного (экспоненциального) распределения определена как

$$F(t_1, t_2) = 1 - e^{-\lambda_1 t_1} - e^{-\lambda_2 t_2} + e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)}.$$

Определим условную плотность распределения $f(t_1)$. Двумерная плотность распределения

$$\begin{aligned} f(t_1, t_2) &= \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} F(t_1, t_2) = \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} = \\ &= (\lambda_1 e^{-(\lambda_1 t_1)}) (\lambda_2 e^{-(\lambda_2 t_2)}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} f(t_1) &= \int_{t_2=0}^{\infty} f(t_1, t_2) dt_2 = \int_{t_2=0}^{\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{-(\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2)} dt_2 = \\ &= \lambda_1 e^{-(\lambda_1 t_1)} \int_{t_2=0}^{\infty} \lambda_2 e^{-(\lambda_2 t_2)} dt_2 = \lambda_1 e^{-(\lambda_1 t_1)}. \end{aligned}$$

1.4.1. МО и дисперсии многомерных случайных величин

Функция и плотность распределения являются исчерпывающими, но слишком громоздкими характеристиками случайной величины. В большинстве случаев при анализе случайных величин удастся обойтись знанием некоторых усредненных характеристик, называемых моментами. Как было отмечено ранее, для одномерной непрерывной случайной величины X , обладающей плотностью распределения $f(x)$, начальный момент порядка k

$$M_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx. \quad (1.32)$$

Для многомерных случайных величин могут определяться собственные и смешанные моменты, например, один из смешанных моментов порядка k для случайных величин X и Y , обладающих плотностью вероятности, имеет вид

$$M_k(X^r, Y^{k-r}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^r y^{k-r} f(x, y) dx dy, \quad k > r. \quad (1.33)$$

Моменты дискретных случайных величин находятся так же, как и непрерывных, только операцию интегрирования нужно заменить суммированием. Чаще всего для характеристики случайных величин используются первый и второй моменты. Рассмотрим их более подробно.

Первые начальные моменты

$$m_j = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Вторые начальные моменты

$$M_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} x_j x_k f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Вторые центральные моменты

$$\mu_{jk} = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} (x_j - m_j)(x_k - m_k) f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Корреляционные моменты и коэффициенты корреляции

При изучении многомерных случайных величин X (нагрузка узлов ЭЭС) наряду с математическим ожиданием и дисперсией, как правило, рассматривается корреляционная матрица $[\text{cov}(X_i, X_j)]$, элементы которой состоят из попарных собственных и взаимных центральных моментов второго порядка, называемых также ковариациями:

$$\begin{aligned}\text{cov}(X_i, X_j) &= \mu_{ij} = M(X_i - m_i, X_j - m_j) = M(X_i X_j) - m_i m_j = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x_i - m_i)(x_j - m_j) f(x_i, x_j) dx_i dx_j.\end{aligned}\quad (1.34)$$

Диагональными элементами матрицы $\text{cov}(X_i, X_j)$ являются дисперсии $\sigma^2(X_i)$. Часто для представления корреляционных моментов используется обозначение $\text{cov}(X, Y)$ или $\sigma(X, Y)$.

Наряду с матрицами корреляционных моментов широкое применение в технических приложениях имеет **матрица коэффициентов корреляции**, характеризующая степень взаимосвязанности случайных величин. Ее элементы определяются по формуле

$$r_{ij} = \frac{\text{cov}(X_i, X_j)}{\sigma_i \sigma_j}.\quad (1.35)$$

Величина $|r_{ij}| = 1$ говорит о линейной зависимости между величинами, а $|r_{ij}| = 0$ — об их статистической независимости.

Обобщенно матрицы корреляционных моментов $K = \text{cov} X$ и коэффициентов корреляции $R = (r_{ij})$ имеют вид:

$$K = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}; \quad R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для независимых случайных величин X_j, X_k

$$\text{cov}(X_j, X_k) = 0.$$

Для нормального распределения (но не для любого) из соотношения $\text{cov}(X_j, X_k) = 0$ следует независимость X_j, X_k .

Следует отметить, что корреляционные моменты имеют некоторую физическую размерность, например $[\text{МВт}^2]$, в то время как коэффициенты корреляции являются безразмерными величинами.

Для случайных векторов $X = [X_1, \dots, X_m]^T$ и $Y = [Y_1, \dots, Y_n]^T$ разной размерности (например, токи в ветвях и мощности в узлах электрической схемы) также может быть определена матрица взаимных корреляционных моментов

$$K_{X,Y} = M[(X - M(X))(Y - M(Y))].$$

Элемент $K_{i,j}$ этой матрицы является корреляционным моментом между компонентой (случайной величиной) i вектора X и компонентой (случайной величиной) j вектора Y . В результате матрица корреляционных моментов может иметь прямоугольную форму. В технических приложениях, как правило, одновременно используются и

собственные и взаимные матрицы корреляционных моментов в виде объединенной матрицы

$$\text{cov}(X, Y) = \begin{bmatrix} K_{X,X} & K_{X,Y} \\ K_{Y,X} & K_{Y,Y} \end{bmatrix},$$

которая является квадратной.

Практические методы определения матриц корреляционных моментов

Матрица корреляционных моментов для совокупности случайных величин (X_1, \dots, X_n) строится на основе матрицы наблюдений, каждый столбец которой характеризует соответствующую случайную величину, а строка i – реализация при наблюдении i : $X = (x_{ij})$, $i = 1, \dots, N$; $j = 1, \dots, n$.

Поскольку корреляционный момент является математическим ожиданием произведения центрированных величин, то удобнее оперировать с центрированной матрицей наблюдений $\tilde{X}_j = (\tilde{x}_{ij} = x_{ij} - m_j)$, где m_j – МО (среднее значение) столбца j . При этом

$$\text{cov } X = \frac{1}{N-1} \tilde{X}^T \tilde{X}.$$

Если дополнительно к центрированию выполнить нормализацию вектора наблюдений $\tilde{X} = (\tilde{x}_{ij} = (x_{ij} - m_j)/s_j)$, то корреляционная матрица преобразуется в матрицу коэффициентов корреляции

$$R = \frac{1}{N-1} \tilde{X}^T \tilde{X}.$$

1.4.2. Корреляционные моменты дискретных случайных величин

Выражения (1.32)–(1.34) предназначены для непрерывных случайных величин с заданной плотностью вероятности. Для дискретных случайных величин, выполняя непосредственное суммирование по элементам вероятностного пространства, получаем

$$\text{cov}(X_i, X_j) = \sum_{k=1}^N (x_{ik} - m_x)(x_{jk} - m_j)p(\omega_k).$$

Если же суммирование выполняется по множеству значений двумерной случайной величины $(x_i, i = 1, \dots, n; y_j, j = 1, \dots, s)$, получаем следующую формулу:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^s (x_i - m_i)(y_j - m_j)p(x_i \cap y_j),$$

где под $p(x_i \cap y_j)$ понимается вероятность тех точек ω_k вероятностного пространства, для которых выполняются соотношения $X(\omega_k) = x_i$; $Y(\omega_k) = y_j$.

Свойства корреляционных моментов:

$$\sigma(x, a) = 0;$$

$$\sigma(x, x) = \sigma_x^2;$$

$$\sigma(x, y) = \sigma(y, x);$$

$$\sigma(ax, by) = ab \sigma(x, y);$$

$$\sigma(x + a, y + b) = \sigma(x, y);$$

$$\sigma(ax + by, cw + dv) = ac\sigma(x, w) + ad\sigma(x, v) + bc\sigma(y, w) + bd\sigma(y, v);$$

$$\sigma^2 \left(\sum a_i x_i \right) = \sum a_i^2 \sigma^2(x_i) + 2 \sum_{i < j} a_i a_j \sigma(x_i, x_j) = \sum_{i, j} a_i a_j \sigma(x_i, x_j).$$

Последнее соотношение можно записать в матричном виде

$$\text{cov}(AX) = A \text{cov}(X) A^T. \quad (1.36)$$

Пример 1.3. На рис. 1.23 представлен пример расчета матриц корреляционных моментов и коэффициентов корреляции для трех узлов нагрузки, заданных своими суточными графиками (блок В2:F8). При этом суточные колебания нагрузки рассматриваются как выборки случайных величин (не учитывается суточная специфика электропотребления). Длительность периода постоянства нагрузки, отнесенная к суткам, рассматривается как вероятность соответствующей случайной величины.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1									
2	Период	t	P1	P2	P3		P1*P2*t	P1*P3*t	P2*P3*t
3	0-6ч	6	50	10	5		125	62,5	12,5
4	6-9ч	3	50	15	5		93,75	31,25	9,375
5	9-12 ч.	3	80	30	7		300	70	26,25
6	12-16ч	4	70	30	5		350	58,3	25
7	16-20 ч	4	100	40	5		666,7	83,3	33,3
8	20-24ч	4	90	20	5		300	75	16,67
9	Всего	24							
10		МО	72,1	23,1	5,3	M(Pi*Pi)	1835,4	380,4	123,1
11		M(P^2)	5570,8	649,0	28,0	Cov	168,5	2,0	1,7
12		D	374,8	114,2	0,4	r	0,8	0,2	0,3
13		s	19,4	10,7	0,7				
14									
15			cov					R	
16			374,8	168,5	2,0			1	0,81
17			168,5	114,2	1,7			0,81	1
18			2,0	1,7	0,4			0,15	0,28
19									1

Рис. 1.23. Корреляционная матрица суточных графиков нагрузки

На базе исходных данных нетрудно получить МО и дисперсии мощностей нагрузки (блок С10:F13). Для корреляционных матриц необходим расчет взаимных моментов (блок Н2:J12). Все центральные моменты второго порядка объединены в таблицу корреляционных моментов (блок С16:E18), из которой делением на стандартные отклонения (блок С13:F13) формируется матрица коэффициентов корреляции (блок Н15:J18). Анализ коэффициентов корреляции говорит о достаточно сильной корреляционной зависимости нагрузок первого и второго узлов и слабой этих двух узлов с третьим.

1.4.3. Дисперсия и корреляционная матрица комплексных случайных величин

В электроэнергетике, как правило, фигурируют комплексные случайные величины (напряжения, токи, мощности, сопротивления, проводимости и др.). Комплексную случайную величину можно геометрически интерпретировать как случайную точку на комплексной плоскости.

Для того чтобы аппарат числовых характеристик был применим и к комплексным случайным величинам, необходимо обобщить основные понятия математического ожидания, дисперсии и корреляционного момента на поле комплексных случайных величин. Очевидно, эти обобщения должны быть сделаны так, чтобы в частном случае, когда мнимая составляющая равна нулю, они сводились к обычным определениям характеристик действительных случайных величин.

При представлении комплексной величины в декартовой системе координат $\underline{x} = x' + jx''$, пользуясь формальными соотношениями для МО, нетрудно получить оценку по выборке математического ожидания

$$M(\underline{x}) = M(x') + jM(x'').$$

Это выражение принимается в качестве определения МО комплексной случайной величины [7].

Несколько сложнее обстоит дело с дисперсией. Поскольку комплексные числа следует понимать как двумерные векторы, то характеризующее свойства отдельной случайной величины понятие дисперсии здесь непригодно – к комплексным случайным величинам более применимо понятие матрицы корреляционных моментов. Однако присущие дисперсии формальные математические операции могут быть распространены на поле комплексных чисел. В частности, воз-

ведение в квадрат следует понимать как умножение комплексного числа на свое сопряженное значение. Отсюда

$$\begin{aligned} D(\underline{x}) &= M\left(\left(\underline{x} - M(\underline{x})\right)\left(\underline{x} - M(\underline{x})\right)^*\right) = \\ &= M\left(x^2 - \underline{x}M(\underline{x}^*) - \underline{x}^*M(\underline{x}) + M(\underline{x})M(\underline{x}^*)\right). \end{aligned}$$

Произведение $\underline{x}M(\underline{x})^*$ представляется в виде

$$\begin{aligned} \underline{x}M(\underline{x}^*) &= (x' + jx'')(m_{x'} - jm_{x''}) = \\ &= (x'm_{x'} + x''m_{x''}) + j(x''m_{x'} - x'm_{x''}), \end{aligned}$$

где $m_{x'} = M(x')$, $m_{x''} = M(x'')$.

Аналогично

$$\begin{aligned} \underline{x}^*M(\underline{x}) &= (x' - jx'')(m_{x'} + jm_{x''}) = \\ &= (x'm_{x'} + x''m_{x''}) - j(x''m_{x'} - x'm_{x''}). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} D(\underline{x}) &= M((x')^2 + (x'')^2 - 2(x'm_{x'} + x''m_{x''}) + m_{x'}^2 + m_{x''}^2) = \\ &= M((x' - m_{x'})^2 + (x'' - m_{x''})^2) = D(x') + D(x''). \end{aligned}$$

В результате получено вещественное число, которое позволяет говорить о дисперсии комплексной случайной величины, включающей в себя вариации как вещественной, так и мнимой составляющих.

Полученный результат совпадает с принятым определением дисперсии комплексной случайной величины [7].

$$D(\underline{x}) = M(|\tilde{x}|^2) = D(x') + D(x''). \quad (1.37)$$

При этом полученная на множестве наблюдений выборочная дисперсия

$$s^2(\underline{X}) = \frac{1}{N-1} \underline{\tilde{X}}^T \underline{\tilde{X}}^*.$$

Отнесенное к физическим объектам понятие «среднеквадратическое отклонение» (СКО) должно быть действительным неотрицательным числом, как любое расстояние. Дисперсия комплексной величины $D(\underline{x})$, как квадрат СКО, может рассматриваться в качестве среднего значения квадрата расстояния случайной величины \underline{x} от ее среднего $M(\underline{x})$, т. е. $|\underline{x} - M(\underline{x})|^2$.

В гильбертовом пространстве квадрат длины вектора определяется как скалярное произведение комплексного вектора на свое сопряженное отображение, $|z|^2 = (z, z^*)$. Из (1.37) видно, что опреде-

ление дисперсии комплексной величины согласуется с определениями скалярного произведения и нормы на комплексных пространствах.

Корреляционный момент двух комплексных случайных величин:

$$\text{cov}(\underline{x}, \underline{y}) = M(\tilde{x}, \tilde{y}^*) = M\left((\underline{x} - M(\underline{x}))(\underline{y} - M(\underline{y}))^*\right).$$

Выполняя простейшие алгебраические преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \text{Re}(\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})) &= M(\tilde{x}'\tilde{y}') + M(\tilde{x}''\tilde{y}'') = \\ &= \text{cov}(x', y') + \text{cov}(x'', y''), \\ \text{Im}(\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})) &= M(\tilde{x}''\tilde{y}') - M(\tilde{x}'\tilde{y}'') = \\ &= \text{cov}(x'', y') - \text{cov}(x', y''), \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $\tilde{x}', \tilde{y}', \tilde{x}'', \tilde{y}''$ – центрированные величины

$$\tilde{x}' = x' - m_{x'}, \tilde{y}' = y' - m_{y'}, \tilde{x}'' = x'' - m_{x''}, \tilde{y}'' = y'' - m_{y''}.$$

Нетрудно видеть, что мнимая составляющая второго центрального момента одной и той же случайной величины (дисперсия) равна нулю, что согласуется с действительным характером дисперсии.

Выражение (1.38) легко воспринимается, поскольку по конфигурации оно совпадает с видом простого произведения двух комплексных чисел:

$$(a + jb)(c - jd) = ac + bd + j(bc - ad).$$

Таким образом, взаимный корреляционный момент двух комплексных величин может быть описан комплексным числом, которое является обобщенным свойством второго центрального момента в поле комплексных чисел, учитывающим корреляционные моменты $K_{x'y'}$, $K_{x'y''}$, $K_{x''y'}$, $K_{x''y''}$ всех (вещественных и мнимых) составляющих:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})) &= K_{x'y'} + K_{x''y''}; \\ \text{Im}(\text{cov}(\underline{x}, \underline{y})) &= K_{x''y'} - K_{x'y''}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Матрица выборочных корреляционных моментов совокупности векторов комплексных случайных величин, образующих матрицу наблюдений \underline{X} , имеет вид

$$\text{cov}(\underline{X}) = \frac{1}{N-1} \tilde{\underline{X}}^T \tilde{\underline{X}}^*. \quad (1.40)$$

Таким образом:

- в качестве дисперсии комплексной величины рассматривается

- не математическое ожидание квадрата центрированной случай-
ной величины, а математическое ожидание квадрата ее модуля;
- в качестве корреляционного момента двух комплексных случай-
ных величин рассматривается не математическое ожидание про-
изведения центрированных величин, а математическое ожида-
ние произведения одной центрированной величины на ком-
плексную сопряженную другой;
 - матрица корреляционных моментов комплексных случайных
величин состоит из комплексных чисел. По диагонали матрицы
представлены вещественные дисперсии. Как вещественные, так
и мнимые составляющие матрицы корреляционных моментов
комплексно определяются из вещественных и мнимых состав-
ляющих рассматриваемой совокупности векторов, образующих
матрицу наблюдений комплексных случайных величин.

Пример 1.4. Комплексные случайные величины $S_i = P_i + jQ_i$ заданы выборками своих составляющих P_i (блок B2:D6) и Q_i (блок F2:H6) (рис. 1.24). Им соответствует блок J2:L6 комплексных чисел. На базе выборки получены МО и дисперсии рассматриваемых вели-
чин (блоки: B8:D10; F8:H10; J8:L8).

Блок выборки комплексных величин центрируется к виду, пока-
занному на рис. 1.25 (блок B12:D16). По формуле (1.40) определяется
искомая матрица корреляционных моментов (рис. 1.25, блок
F12:H15). Остальные расчеты на рис. 1.25 показаны для иллюстрации
справедливости соотношения (1.40). В строках 18–21 представлены
корреляционные матрицы $\text{cov } P$, $\text{cov } Q$, $\text{cov } PQ$, а в строках 23–26
суммы отдельных составляющих. Нетрудно видеть, что действительно
но $\text{Re}(\text{cov } S) = \text{cov } P + \text{cov } Q$, а $\text{Im}(\text{cov } S) = (\text{cov } PQ)^t - \text{cov } PQ$.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1												
2		P1	P2	P3		Q1	Q2	Q3		S1	S2	S3
3		10	20	10		4	9	3		10+4i	20+9i	10+3i
4		15	15	20		7	6	7		15+7i	15+6i	20+7i
5		20	10	15		6	8	8		20+6i	10+8i	15+8i
6		20	5	25		8	2	11		20+8i	5+2i	25+11i
7												
8	МО	16,25	12,5	17,5		6,25	6,25	7,25		16,25+6,25i	12,5+6,25i	17,5+7,25i
9	Дисп	22,92	41,67	41,67		22,92	41,67	41,67				
10	ско	4,79	6,45	6,45		4,79	6,45	6,45				

Рис. 1.24. Комплексные случайные величины. Параметры

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
12		S-mS				cov S						
13		-6,25-2,25i	7,5+2,75i	-7,5-4,25i		25,8+j0	-33,9-j0,427	26,1-j3,75				
14		-1,25+0,75i	2,5-0,25i	2,5-0,25i		-33,9-j0,427	51,25+j0	-42,1+j1,67				
15		3,75-0,25i	-2,5+1,75i	-2,5+0,75i		26,1-j3,75	-42,1+j1,67	52,6+j0				
16		3,75+1,75i	-7,5-4,25i	7,5+3,75i								
17												
18		covP				covQ				covPQ		
19		22,92	-29,17	20,83		2,92	-4,75	5,25		6,3	-9,2	10,8
20		-29,17	41,67	-33,33		-4,75	9,58	-8,75		-8,8	15,8	-19,2
21		20,83	-33,33	41,67		5,25	-8,75	10,92		14,6	-20,8	19,2
22												
23		covP+covQ				tr(covPQ) - covPQ						
24		25,83	-33,92	26,08		0	0,42	3,75				
25		-33,92	51,25	-42,08		-0,42	0	-1,67				
26		26,08	-42,08	52,58		-3,75	1,67	0				
27												

Рис. 1.25. Комплексные случайные величины. Ковариация

1.4.4. Регрессионная зависимость

Для многих явлений в природе и технике типичны стохастические (случайные) зависимости, когда существуют некоторые случайные факторы (Z_1, \dots, Z_m) , которые воздействуют на обе величины, но есть и факторы (X_1, \dots, X_k) и (Y_1, \dots, Y_s) , которые воздействуют на переменные раздельно. При этом если существуют общие случайные факторы,

$$X = g(Z_1, \dots, Z_m, X_1, \dots, X_k); Y = h(Z_1, \dots, Z_m, Y_1, \dots, Y_s),$$

то X и Y стохастически зависимы.

Линии регрессии. Кривые, определяемые уравнениями

$$\bar{y}(x) = M(Y/(X = x)) \text{ и } \bar{x}(y) = M(X/(Y = y)),$$

называются линиями регрессии Y относительно X и X относительно Y . Случайные величины называются линейно-коррелированными, если линии регрессии – прямые.

Линии регрессии Y относительно X и X относительно Y имеют вид:

$$\bar{y}(x) = m_Y + \rho_{Y/X}(x - m_X);$$

$$\bar{x}(y) = m_X + \rho_{X/Y}(y - m_Y),$$

где коэффициенты регрессии

$$\rho_{Y/X} = \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} K(X, Y); \rho_{X/Y} = \frac{\sigma_X}{\sigma_Y} K(X, Y).$$

1.4.5. Многомерное нормальное распределение

Обобщением рассмотренной нами одномерной нормальной случайной величины является случайный вектор, каждая компонента которого принадлежит нормальному распределению. Вначале рассмот-

рим нормальный вектор $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, образованный *независимыми* нормальными компонентами. Для таких векторов совместная функция плотности равна произведению индивидуальных плотностей, характеризуемых математическими ожиданиями m_i и дисперсиями σ_i^2 . Отсюда

$$f(X) = \prod_{i=1}^n f(X_i) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{(x_i-m_i)^2}{2\sigma_i^2}}.$$

В общем случае, когда компоненты случайного вектора X – зависимые случайные величины с вектором математических ожиданий M_X и матрицей корреляционных моментов K , плотность распределения многомерной случайной величины X определяется по формуле

$$f(X) = C \exp\left(-\frac{1}{2}(X - M_X)^T K^{-1}(X - M_X)\right), \quad (1.41)$$

где нормирующий множитель C выражается через определитель $\det(K^{-1})$ обратной матрицы корреляционных моментов:

$$C = \frac{\sqrt{\det(K^{-1})}}{(\sqrt{2\pi})^n}. \quad (1.42)$$

Формула

$$f(X) = C \exp((X - M_X)^T \Lambda (X - M_X))$$

с квадратичной формой $(X - M_X)^T \Lambda (X - M_X)$ при *положительно определенной матрице* Λ и коэффициенте C , определенном согласно (1.42), всегда соответствует плотности нормального распределения с вектором МО M_X и матрицей корреляционных моментов Λ^{-1} . Многие выводы математической статистики связаны с линейными комбинациями нормальных случайных величин, поэтому полезно изучить свойства таких комбинаций [14]. Основные результаты, необходимые в дальнейшем, можно сформулировать следующим образом.

Вектор $Y = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, каждая компонента которого представляет собой линейную комбинацию нормальных случайных величин $\{X_1, X_2, \dots, X_m\}$:

$$Y_i = \sum_{j=1}^m a_{ij} X_j, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.43)$$

имеет многомерное нормальное распределение.

Существует условие независимости случайных векторов $Y = AX$ и $Z = BX$, полученных на основе линейного преобразования одного и того же исходного *нормального случайного вектора* X с матрицей

корреляционных моментов $\text{cov}(X)$: для того чтобы векторы Y и Z были статистически независимыми, необходимо и достаточно соблюдение равенства $A \text{cov}(X) B^T = \theta$.

Этот результат важен в математической статистике, когда на основе одной и той же случайной выборки наблюдений $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ исходной случайной величины изучаются сразу несколько ее параметров, например математическое ожидание и дисперсия.

Приведение нормального вектора к простейшему виду

Известно [15], что выражение (1.43) представляет собой линейное преобразование с матрицей A . При этом существует такой базис (система независимых векторов максимальной размерности), при котором линейное преобразование сводится к простейшему масштабированию координат (матрица линейного преобразования является диагональной). Известно, что таким базисом является совокупность собственных векторов $H = [\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n]$ исходной матрицы. При этом справедливо соотношение подобия

$$A = H \Lambda H^{-1}, \quad (1.44)$$

$$\Lambda = H^{-1} A H, \quad (1.45)$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ – диагональная матрица из собственных чисел, удовлетворяющих соотношению

$$A \bar{h}_i = \lambda_i \bar{h}_i. \quad (1.46)$$

Применяя данный математический аппарат к матрице корреляционных моментов $\text{cov}(X)$, исходную систему зависимых нормальных случайных величин X можно выразить через линейную комбинацию независимых величин Y , $X = H Y$. Применительно к матрице $\text{cov}(X)$ соотношения подобия (1.44), (1.45) преобразуются к виду

$$\text{cov}(X) = H \Lambda H^{-1}; \quad (1.47)$$

$$\Lambda = H^{-1} \text{cov}(X) H. \quad (1.48)$$

Поскольку матрица $\text{cov}(X)$ положительно определена [7], то все собственные числа являются вещественными, а все собственные векторы могут быть сделаны ортонормированными [10, 14, 15] (преобразования Грама – Шмидта):

$$\begin{aligned} (\bar{h}_i, \bar{h}_i) &= 1; \\ (\bar{h}_i, \bar{h}_j) &= 0, i \neq j. \end{aligned}$$

В силу ортонормированности системы векторов $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n\}$ обратная матрица H^{-1} оказывается равной сопряженной H^T , и выражение (1.48) переписывается в виде

$$\Lambda = H^T \text{cov}(X) H. \quad (1.49)$$

Наряду с (1.49) легко найти обратное соотношение, связывающее исходную корреляционную матрицу $\text{cov}(X)$ через полученную диагональную:

$$\text{cov}(X) = H \Lambda H^T.$$

Введем теперь новые случайные величины $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_n\}$, составляющие вектор Y , который связан с исходным вектором X соотношением $Y = H^{-1}X$ (представление вектора X в новом базисе $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n\}$). Матрица корреляционных моментов вектора Y , согласно (1.49), определяется диагональной матрицей Λ .

$$\text{cov}(Y) = H^{-1} \text{cov}(X) H = H^T \text{cov}(X) H = \Lambda. \quad (1.50)$$

Диагональный характер матрицы корреляционных моментов равносильно доказательству независимости образующих ее векторов.

Векторы X и Y определены на одном и том же множестве элементарных случайных событий и имеют одну и ту же область определения, поскольку вектор Y – это вектор X , но в ином базисе. Следовательно, вероятностные свойства Y распространяются на вектор X . Поскольку Y содержит только независимые компоненты и связан однозначным соответствием с исходным вектором X , то анализ X целесообразно выполнять через более простой вероятностный анализ вектора Y .

С помощью найденных независимых компонент вектора Y область возможных значений определяется достаточно просто. Для независимых случайных величин вероятность попадания в произвольный параллелепипед области значений $\{(a_i \leq Y_i \leq b_i, i = 1, \dots, n)\}$ определяется произведением:

$$P\left\{\prod_{i=1}^n (a_i \leq Y_i \leq b_i)\right\} = \prod_{i=1}^n (F_i(b_i) - F_i(a_i)).$$

МО и дисперсия определяются исходя из линейности преобразования

$$M(Y) = H^T M(X); \sigma^2(Y_i) = \lambda_i.$$

Это позволяет применить для оценки области значений многомерной случайной величины те же приемы, которые были использованы для одномерной нормальной случайной величины. Рассмотрим данный подход на примере двумерной случайной величины.

Пример 1.5. Переход от системы зависимых случайных величин к независимым. Пусть задано двумерное нормальное распределение с нулевым вектором математических ожиданий и матрицей корреляционных моментов:

$$K = \text{cov}(X) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные числа и векторы матрицы $\text{cov}(X)$. Как известно [15], для этого необходимо составить характеристическую матрицу A_λ вида

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

и найти корни ее определителя $\det(A_\lambda) = 0$. Выполняя необходимые действия, получаем:

$$(3 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 = 0.$$

Решение этого квадратного уравнения определяют собственные числа $\lambda_1 = 3,414$; $\lambda_2 = 0,586$.

Собственные векторы матрицы $H = \{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ определяются из решения уравнений $K_\lambda \bar{h}_i = 0$. Данная система уравнений является вырожденной, исходя из принципа определения собственных чисел. Для получения нетривиального (ненулевого) решения лишнее уравнение отбрасывается, а одной из компонент искомого вектора произвольно присваивается некоторая, отличная от нуля величина. Остальные компоненты вектора определяются в результате решения оставшейся части системы уравнений [15].

В нашем случае получаем:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -0,414 & 2,414 \end{pmatrix}.$$

Собственные векторы $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2\}$ ортогональны. Чтобы убедиться в этом, достаточно их перемножить скалярно. Разделив векторы \bar{h}_1 и \bar{h}_2 на их модули, получаем ортонормированную систему векторов. При этом

$$H = \begin{pmatrix} 0,926 & 0,382 \\ -0,382 & 0,926 \end{pmatrix}.$$

Проверим, что случайный вектор Y , полученный по формуле

$$Y = H^{-1}X = H^T X,$$

состоит из независимых компонент, т. е. обладает диагональной корреляционной матрицей. В соответствии с формулой (1.50) матрица корреляционных моментов для новых случайных величин $\{y_1, y_2\}$ определяется следующим образом

$$\text{cov}(Y) = H^T \text{cov}(X) H.$$

Подставляя цифры, получаем:

$$\begin{aligned} \text{cov}(Y) &= \begin{pmatrix} 0,926 & -0,382 \\ 0,382 & 0,926 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,926 & 0,382 \\ -0,382 & 0,926 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3,414 & 0 \\ 0 & 0,585 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица диагональная. При этом ее диагональные члены совпадают с собственными числами.

Оценим область возможных значений двумерного вектора с независимыми компонентами $\{y_1, y_2\}$, воспользовавшись вероятностями для одномерных нормально распределенных случайных величин и выражением

$$P(A \cap B) = P(A)P(B),$$

обозначающим совместную вероятность попадания *независимых* случайных величин в заданные диапазоны через абсолютные вероятности каждого диапазона. При этом можно получить оценки, аналогичные оценкам для одномерной случайной величины:

$$\begin{aligned} P(|y_1 - M(y_1)| \leq \sigma_1 \cap |y_2 - M(y_2)| \leq \sigma_2) &= 0,67^2 = 0,449; \\ P(|y_1 - M(y_1)| \leq 2\sigma_1 \cap |y_2 - M(y_2)| \leq 2\sigma_2) &= 0,95^2 = 0,903; \\ P(|y_1 - M(y_1)| \leq 3\sigma_1 \cap |y_2 - M(y_2)| \leq 3\sigma_2) &= 0,9973^2 = \\ &= 0,995. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Плотность многомерного нормального распределения, согласно (1.41), имеет вид:

$$f(X) = C_X \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{X}^T K^{-1} \tilde{X} \right),$$

где $\tilde{X} = X - M_X$ – центрированный вектор X . В новом базисе $\{\bar{h}_1, \bar{h}_2, \dots, \bar{h}_n\}$ данная плотность преобразуется к виду

$$f(Y) = C_X \exp \left(-\frac{1}{2} \tilde{Y}^T \Lambda^{-1} \tilde{Y} \right),$$

где Λ – диагональная матрица, каждый элемент которой определяет дисперсию соответствующей компоненты Y .

Множеству $f(Y) = \text{const}$ (линии равного уровня для плотности распределения) соответствует постоянство квадратичной формы $\tilde{Y}^T \Lambda^{-1} \tilde{Y}$, или, с учетом диагональности матрицы Λ , уравнение эллипсоида

$$\sum \frac{y_i^2}{\sigma_i^2} = r^2.$$

Таким образом, для многомерной нормально распределенной случайной величины постоянству плотности распределения соответствуют эллипсоиды. При этом большая ось эллипсоида соответствует

максимальному собственному числу матрицы корреляционных моментов, а оси эллипсоида в исходной системе координат имеют угловые коэффициенты, определяемые компонентами собственных векторов.

Зоны значений двумерной случайной величины, соответствующие неравенствам (1.51), изображены на рис. 1.26, где $\sigma_i^2 = \lambda_i$.

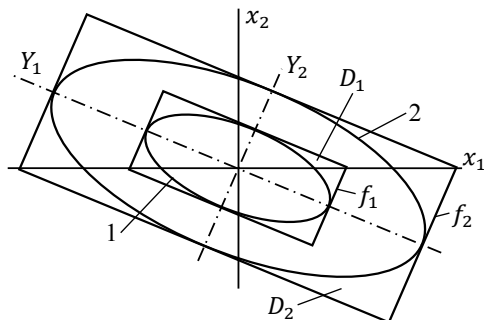


Рис. 1.26. Корреляционные эллипсы и доверительные области:

$$1: \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = 1; 2: \frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = 4$$

Прямоугольники D_1 и D_2 удовлетворяют условиям:

$$D_1: P\{(x_1, x_2) \in D_1\} = 0,449; D_2: P\{(x_1, x_2) \in D_2\} = 0,903.$$

Случайные величины y_1, y_2 показаны в координатах, соответствующих исходной системе случайных величин $\{x_1, x_2\}$. Эллипсы, вписанные в выделенные области значений, могут быть построены как для исходной системы величин, так и для вновь введенных величин $\{y_1, y_2\}$. В самом деле, рассмотрим, например, эллипс первого внутреннего прямоугольника. Он имеет две полуоси, совпадающие с новыми координатами, – малую (длиной σ_2) и большую (длиной σ_1). Уравнение этого эллипса в новых координатах имеет вид:

$$\frac{y_1^2}{\sigma_1^2} + \frac{y_2^2}{\sigma_2^2} = 1. \quad (1.52)$$

В матричной форме уравнение (1.52) можно переписать следующим образом:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \Lambda^{-1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 1,$$

где

$$\Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

– обратная корреляционная матрица случайных величин $\{y_1, y_2\}$. Переходя от нового случайного вектора Y к старому с помощью соотношения $Y = H^T X$, получаем:

$$X^T H \Lambda^{-1} H^T X = 1.$$

Легко заметить, что матрица $H \Lambda^{-1} H^T$ удовлетворяет соотношению (учитывается соотношение $H^{-1} = H^T$):

$$(H \Lambda H^T)(H \Lambda^{-1} H^T) = E.$$

Следовательно,

$$H \Lambda^{-1} H^T = (H \Lambda H^T)^{-1} = \text{cov}(X)^{-1}.$$

При этом формула показанного на рис. 1.26 внутреннего эллипса переписывается следующим образом:

$$X^T \text{cov}(X)^{-1} X = 1.$$

Соответствующий данному уравнению эллипс называется корреляционным.

Как следует из общего уравнения плотности распределения многомерной случайной величины X :

$$f(X) = C \exp \left(-\frac{1}{2} (X - \mu)^T K^{-1} (X - \mu) \right),$$

точкам корреляционного эллипса соответствуют одинаковые плотности вероятности, т. е. показанные на рис. 1.26 эллипсы представляют собой линии уровня плотности многомерного нормального распределения. Поверхность многомерной плотности распределения показана на рис. 1.27.

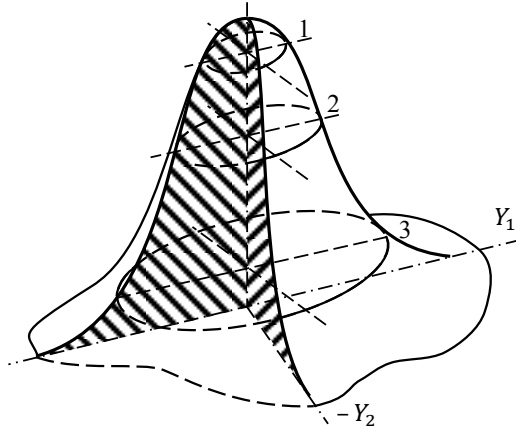


Рис. 1.27. Плотность вероятности и эллипсы постоянной плотности

1.5. Функции от случайных величин

Сумма случайных величин

Если X, Y – непрерывные случайные величины, то сумма случайных величин $Z = X + Y$ также непрерывная случайная величина.

Функция распределения суммы случайных величин

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P\{Z < z\} = P\{X + Y < z\} = \sum_{\forall x} P\{Y < z - x\}P\{X = x\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(z - x) dF_X(x). \end{aligned}$$

Данный интеграл называется интегралом типа свертки.

Для дискретной случайной величины $X = \{x_i, p_i, i = 1, \dots, n\}$

$$F_{X+Y}(z) = \sum_{i=1}^n F_Y(z - x_i)p_i.$$

Именно такую операцию мы выполняли при определении вероятности дефицита мощности при биномиальном распределении числа отключенных блоков.

Если задана совместная функция распределения $F_{XY}(x, y)$, то

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{XY}(x, z - x) dF_X(x).$$

Плотность распределения суммы

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x, z - x) dF_X(x).$$

При независимости X, Y ($f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$) этот интеграл преобразуется в интеграл свертки

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(z - x)f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z - y)f_Y(y)dy.$$

Математическое ожидание суммы $Z = X + Y$:

$$m_Z = m_X + m_Y.$$

Дисперсия

$$\begin{aligned} D(Z) &= M(Z - m_Z)^2 = M((X - m_X) + (Y - m_Y))^2 = \\ &= D(X) + D(Y) + 2M((X - m_X)(Y - m_Y)) = \\ &= D(X) + D(Y) + 2 \operatorname{cov}(X, Y), \end{aligned}$$

где $\operatorname{cov}(X, Y)$ – корреляционный момент рассматриваемых случайных величин.

Для независимых случайных величин ковариация $\text{cov}(X, Y) = 0$.
Отсюда, как частный случай,

$$M(XY) = m_X m_Y.$$

Если одна из случайных величин линейно зависит от другой $Y = \alpha X$, то

$$M(Y) = \alpha m_X; \text{cov}(x, \alpha x) = \alpha M(x - m_X)^2 = \alpha D(X) = \alpha \sigma_X^2.$$

При этом коэффициент корреляции

$$k_{XY} = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\alpha \sigma_X^2}{\sigma_X \sqrt{\alpha^2 \sigma_X^2}} = 1.$$

Итак, для линейно зависимых случайных величин коэффициент корреляции по модулю равен 1.

Математическое ожидание и дисперсия линейной комбинации случайных величин

Формулы определения математического ожидания и дисперсии позволяют получить следующие выражения для линейной комбинации случайных величин, определенных на одном и том же вероятностном пространстве:

$$M\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i M(X_i).$$

В матричном виде:

$$M(A^T X) = A^T M(X).$$

Дисперсия линейной комбинации случайных величин

$$D\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j K_{ij} = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{j=1}^n a_j K_{ij} = \\ = A^T K_X A,$$

где $K_X = \{\text{cov}(X_i, X_j)\}$ – матрица корреляционных моментов.

Когда входящие в линейную комбинацию случайные величины $\{X_i\}$ независимы, выражение для дисперсии упрощается из-за равенства нулю взаимных корреляционных моментов:

$$\sigma^2\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \sigma_i^2.$$

В прикладных задачах часто приходится использовать линейные связи между исходным вектором случайных величин $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]$ и другим вектором $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$,

$$Y = AX,$$

где A – в общем случае прямоугольная матрица с r строками и n столбцами, $\dim Y = (r, 1)$; $\dim A = (r, n)$; $\dim X = (n, 1)$.

В этом случае вектор математических ожиданий $M(Y)$ и матрица корреляционных моментов $\text{cov}(Y)$ случайных величин $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_n]$ определяются по формулам:

$$M(Y) = AM(X); \quad (1.53)$$

$$\text{cov}(Y) = A \text{cov}(X) A^T. \quad (1.54)$$

Чтобы не ошибиться в очередности составляющих, следует проверять индексацию на размерности $\dim: (r, r) = (r, n)(n, n)(n, r)$.

Выражения, аналогичные формулам (1.53), (1.54), можно приближенно записать и для случайных векторов X , Y , связанных **системой нелинейных уравнений**

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_i, i = 1, \dots, r. \quad (1.55)$$

Здесь $\{y_i, i = 1, \dots, r\}$ – независимые, а $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ – зависимые переменные. Требуется определить корреляционную матрицу K_X зависимых переменных при наличии корреляционной матрицы K_Y независимых переменных.

Рассмотрим точку $X_0 = \{x_i^0\}$, соответствующую математическим ожиданиям независимых переменных $\{m_{y_i}\}$ (в общем случае это не МО X , но при линейной функциональной зависимости это именно МО X):

$$\varphi_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = m_{y_i}, i = 1, \dots, r. \quad (1.56)$$

При этом $x_i = x_i^0 + \Delta x_i$; $y_i = m_{y_i} + \Delta y_i$.

При линейной аппроксимации выполняется разложение нелинейной функции (1.55) в ряд Тейлора с сохранением только членов первого порядка:

$$\begin{aligned} \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \varphi_i(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Delta x_j = \\ &= m_{y_i} + \Delta Y_i. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Принимая во внимание соотношение (1.56), можно записать:

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} \Delta x_j = \Delta Y_i, i = 1, \dots, r,$$

или, в матричном виде,

$$W \Delta X = \Delta Y, \quad (1.58)$$

где $W = \{\partial \varphi_i / \partial x_j\}$ – матрица Якоби системы функций $\varphi(X)$.

При линейности функций $\varphi_i(X)$ зависимые переменные $\{\Delta x_i\}$ без дополнительной аппроксимации являются линейными комбинациями центрированных величин $\{\tilde{Y}_i = y_i - m_{y_i}\}$. Тогда условие $M(\tilde{Y}) = 0$ приводит к решению $M(\tilde{X}) = 0$. Отсюда

$$\{x_i^0 = M(x_i), \forall i\}; \varphi_i(M(x_j)) = m_{y_i}. \quad (1.59)$$

Следует подчеркнуть, что данное соотношение справедливо только при линейности $\varphi_i(X)$.

Согласно (1.58) $\tilde{X} = W^{-1}\tilde{Y}$. Отсюда матрица корреляционных моментов зависимых переменных в соответствии с выражениями (1.54) определяется как

$$\text{cov } X = W^{-1} \cdot \text{cov } Y \cdot (W^{-1})^T. \quad (1.60)$$

1.5.1. Характеристическая функция случайной величины

Характеристическая функция случайной величины – один из способов задания распределения. Характеристические функции могут быть удобнее в тех случаях, когда, например, плотность или функция распределения имеют очень сложный вид.

Рассмотрим случайную величину X с распределением $F(x)$. Тогда ее характеристической функцией называется функция, имеющая вид:

$$\psi_X(t) = M(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x).$$

Для непрерывных функций распределения

$$\psi_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx, \quad (1.61)$$

то есть характеристическая функция – это преобразование Фурье функции плотности распределения случайной величины.

Если случайная величина X принимает значения в произвольном гильбертовом пространстве \mathcal{H} , то ее характеристическая функция имеет вид:

$$\psi_X(t) = M(e^{i\langle t, X \rangle}), \forall t \in \mathcal{H},$$

где $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в \mathcal{H} .

Если случайная величина X дискретна, то есть

$$\mathcal{P}(X = x_k) = p_k, k = 1, 2, \dots,$$

то

$$\psi_X(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itx_k} p_k \quad (1.62)$$

(ряд Фурье с коэффициентами p_k).

Распределение Бернулли. Здесь $X = \{0; 1\}$ с вероятностями, соответственно, $\{q; p\}$. Подставляя эти значения в (1.68), получаем:

$$\psi_X(t) = qe^{it0} + pe^{it} = q + pe^{it}.$$

Распределение Пуассона. Здесь $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ с вероятностями $p_k = (\lambda^k/k!)e^{-\lambda}$. Подставляя эти значения в (1.68), получаем

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda e^{it})^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = \\ &= e^{\lambda(e^{it}-1)}.\end{aligned}\quad (1.63)$$

Биномиальное распределение. Здесь вероятность события k успехов в n испытаниях $p_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}$. Отсюда

$$\begin{aligned}\psi_X(t) &= \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} e^{itk} = \sum_{k=0}^n C_n^k (pe^{it})^k q^{n-k} = \\ &= (q + pe^{it})^n.\end{aligned}\quad (1.64)$$

Последнее равенство есть бином Ньютона.

Равномерное распределение. Пусть $X \in [-a; a]$ с плотностью распределения $f(x) = 1/(2a)$. Подставляя данную функцию в (1.41), получаем:

$$\psi_X(t) = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a e^{itx} dx = \frac{1}{2iat} (e^{ia} - e^{-ia}) = \frac{\sin(at)}{at}.$$

Показательное распределение относится к классу непрерывных и имеет плотность распределения $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Отсюда характеристическая функция

$$\psi_X(t) = -\lambda \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-\lambda x} dx = -\lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda - it)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}, \quad (1.65)$$

поскольку $|e^{-(\lambda - it)x}| = e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$.

Нормальное распределение

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(itx - \frac{(x - m)^2}{2\sigma^2}\right) dx = e^{imt - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}. \quad (1.66)$$

Стандартное нормальное распределение

$$\psi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(itu - \frac{u^2}{2}\right) du = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Свойства характеристических функций:

- характеристическая функция однозначно определяет распределение. Пусть X, Y – две случайные величины, и $\psi_X(t) = \varphi_Y(t)$,

$\forall t$. Тогда $F_X(x) = F_Y(x)$. В частности если обе величины абсолютно непрерывны, то совпадение характеристических функций влечет совпадение плотностей распределения;

- характеристическая функция всегда ограничена:

$$|\psi_X(t)| \leq 1, \quad \forall t \in \mathbb{R};$$

- характеристическая функция в нуле равна единице:

$$|\psi_X(0)| = 1;$$

- характеристическая функция равномерно непрерывна на всей действительной оси: $\psi_X(t) \in C(\mathbb{R})$;
- характеристическая функция как функция случайной величины однородна:

$$\psi_{aX}(t) = \psi_X(at), \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

$$\psi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \psi_X(at);$$

- характеристическая функция суммы независимых случайных величин равна произведению их характеристических функций.

Пусть $S = \sum X_i$, тогда

$$\psi_{\sum X_i}(t) = \prod \psi_{X_i}(t);$$

- для всех вещественных t верно равенство $\psi_X(-t) = \psi_X^*(t)$, где ψ_X^* – комплексно сопряженная с $\psi_X(t)$ функция.

Теорема обращения (Леви). Пусть $F(x)$ – функция распределения, а $\psi_X(t)$ – ее характеристическая функция. Если a и b – точки непрерывности $F(x)$,

$$F(b) - F(a) = \frac{1}{2\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T \frac{e^{ita} - e^{itb}}{it} \psi_X(t) dt,$$

то есть по характеристической функции можно определить вероятность некоторого интервала случайной величины.

Если случайная величина X имеет начальный момент n , то характеристическая функция имеет непрерывную производную n , то есть $\psi_X \in C^n(\mathbb{R})$ и более того:

$$i^n M(X^n) = i^n \nu_n = \frac{d^n}{dt^n} \psi_X(0).$$

Обратное преобразование Фурье

Пусть дана случайная величина X , чья характеристическая функция равна $\psi_X(t)$. Тогда:

- если X дискретна и принимает целые значения, то

$$\mathcal{P}(X = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk} \psi_X(t) dt, \quad k \in \mathbb{Z};$$

- если X абсолютно непрерывна и $f_X(x)$ – ее плотность, то

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \psi_X(t) dt, x \in \mathbb{R}.$$

1.5.2. Характеристическая функция суммы случайных величин

В качестве примера рассмотрим сумму $X + Y$ двух случайных величин $X \sim \Pi(\lambda_X)$, $Y \sim \Pi(\lambda_Y)$ (две разнотипные группы генераторов), описываемых распределениями Пуассона с параметрами соответственно λ_X , λ_Y . Характеристическая функция суммы равна произведению характеристических функций слагаемых. Согласно (1.63)

$$\psi_{X+Y}(t) = e^{\lambda_X(e^{it}-1)} e^{\lambda_Y(e^{it}-1)} = e^{(\lambda_X+\lambda_Y)(e^{it}-1)}.$$

Но это означает, что результирующая характеристическая функция описывает распределение Пуассона с параметром $\lambda_\Sigma = \lambda_X + \lambda_Y$, то есть сумма двух случайных величин, описываемых распределением Пуассона, также описывается распределением Пуассона. Справедливо и обратное: если сумма двух случайных величин описывается распределением Пуассона, то и каждая из составляющих также распределена по закону Пуассона.

Сумма случайных величин $X \sim B(n, p)$, $Y \sim B(m, p)$ с биномиальным распределением и одинаковой вероятностью успеха. Согласно (1.64) характеристическая функция суммы

$$\psi_{X+Y}(t) = (q + pe^{it})^n (q + pe^{it})^m = (q + pe^{it})^{n+m}$$

равна характеристической функции биномиального распределения с параметрами $n + m$ и p .

Сумма n случайных величин $X_i \sim E(\alpha)$ с показательным распределением. Согласно (1.65) характеристическая функция суммы

$$\psi_{\Sigma X_k}(t) = \prod_{k=1}^n \frac{\alpha}{\alpha - it} = \left(1 - \frac{it}{\alpha}\right)^{-n}$$

равна характеристической функции гамма-распределения $\Gamma(\alpha, n)$.

На этих примерах мы видим одно из полезных применений характеристических функций – с их помощью можно получить некоторые полезные нам соотношения.

1.5.3. Производящая функция моментов

Рассмотрим случайную величину X с распределением $F(x)$. Тогда ее производящей функцией моментов называется функция, имеющая вид:

$$M_X(t) = M(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} dF(x).$$

Для непрерывных функций распределения

$$M_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x) dx, \quad (1.67)$$

то есть производящая функция моментов – это преобразование Лапласа плотности распределения случайной величины.

Если случайная величина X дискретна, то есть

$$\mathcal{P}(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots,$$

то

$$M_X(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{tx_i} p_i. \quad (1.68)$$

Поскольку в интеграле (1.61) параметр i представляется в виде константы, то производящая функция моментов, как правило (но не всегда), может рассматриваться как частный случай характеристической функции при $i = 1$.

Распределение Бернулли. Здесь $X = \{0; 1\}$ с вероятностями, соответственно, $\{q; p\}$. Подставляя эти значения в (1.68), получаем:

$$M_X(t) = qe^{t0} + pe^t = q + pe^t.$$

Стандартное равномерное распределение. Здесь $X \in [0; 1]$ с плотностью распределения $f(x) = 1$. Подставляя данную функцию в (1.41), получаем:

$$M_X(t) = \int_0^1 e^{tx} dx = \frac{1}{t} (e^t - 1).$$

Свойства производящих функций моментов во многом аналогичны свойствам характеристических функций в силу похожеści их определений:

- производящая функция моментов однозначно определяет распределение. Пусть X, Y – две случайные величины, и $M_X(t) = M_Y(t), \forall t$. Тогда $F_X(x) = F_Y(x)$. В частности, если обе величины абсолютно непрерывны, то совпадение производящих функций моментов влечет совпадение плотностей распределения. Если обе случайные величины дискретны, то совпадение производящих функций моментов влечет совпадение функций вероятности;
- производящая функция моментов как функция случайной величины однородна:

$$M_{aX}(t) = M_X(at), \quad \forall a \in \mathbb{R};$$

- производящая функция моментов суммы независимых случайных величин равна произведению их производящих функций моментов. Пусть $S = \sum X_i$,

$$M_{\sum X_i}(t) = \prod M_{X_i}(t);$$

- момент порядка n случайной величины X :

$$M(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M_X(t)|_{t=0}.$$

Два последних свойства особенно полезны для приложений. Мы часто комбинируем случайные величины, описываемые разными распределениями. Например, нас интересует межремонтный цикл технического устройства, который состоит из двух подинтервалов: работа и восстановление. Длительность первого описывается экспоненциальным распределением с параметром λ , а второй – нормальным распределением с параметрами m , σ . Как определить МО и дисперсию длительности цикла?

Производящая функция моментов цикла:

$$M_{\sum X_i}(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t).$$

Производящая функция моментов экспоненциального распределения (из (1.65)):

$$M_{X_1}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}.$$

Производящая функция моментов нормального распределения:

$$M_{X_2}(t) = e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

В результате

$$M_{\sum X_i}(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Первый начальный момент длительности цикла:

$$\begin{aligned} m_X &= \frac{d}{dt} M_{\sum X_i}(t)|_{t=0} = \\ &= \left[\frac{\lambda}{(\lambda - t)^2} e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} + \frac{\lambda}{\lambda - t} e^{mt + \frac{\sigma^2 t^2}{2}} (m + \sigma^2 t) \right]_{t=0} = \frac{1}{\lambda} + m. \end{aligned}$$

Мы рекомендуем читателю самостоятельно определить дисперсию длительности цикла.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2.1. Характеристика задач и методов, используемых в математической статистике

Приведенные в первой главе пособия понятия теории вероятностей составляют базовую страницу теоретической математики, посвященной изучению и абстрагированию философского понятия случайности. Инженер-прикладник не занимается разработкой математической теории, а использует ее как инструмент для решения конкретных технических задач. Вопросы, связанные с применением методов теории вероятностей для решения практических задач, составляют предмет математической статистики [13, 14, 16–20]. Один из крупнейших специалистов в этой области Р. Фишер выделяет три основных направления, в которых практически применяются результаты теории вероятностей: сокращение объема данных, анализ данных, предсказание.

Сокращение объема данных. Возможность компактного представления исходных данных, зависящих от большого количества экспериментов, использования только необходимой для получения конечного результата информации на основе применения методов теории вероятностей уже была проиллюстрирована на примерах (см. гл. 1). Рассмотрим приемы сжатия информации, характерные для вероятностных расчетов.

Особенности представления области определения случайной величины в теории вероятностей. Пусть рассматриваемые случайные величины определяются графиками, как показано на рис. 2.1.

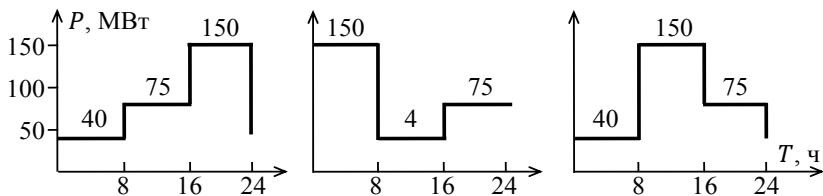


Рис. 2.1. Примеры графиков, которым соответствует одна функция распределения

Вероятностные методы анализа не учитывают порядка следования элементов (это учитывается в теории случайных процессов), определяющих случайную величину P , поэтому каждой из случайных величин соответствует одна и та же функция распределения. Конечно, представления функций в виде рисунка (рис. 2.1) более информативны, чем их анализ на основе функции распределения. Например, приведенные на рисунке графики позволяют не только оценить область изменения соответствующих нагрузок, но и выделить для каждого случая утренние и вечерние значения. Однако дополнительная информация нужна далеко не всегда. Тот класс задач, в котором требуется только общее множество значений, на основе понятия функции распределения решается более экономно, чем при использовании средств классического функционального анализа.

Сокращение необходимой информации о случайной величине. Дальнейшие возможности сжатия вероятностной информации заключаются в замене функции распределения моментами. Как видно из приведенных ранее примеров, некоторые физические величины, заданные на вероятностных пространствах, полностью определяются своими первыми и вторыми моментами. В таких случаях вместо функции распределения одномерной случайной величины достаточно хранить два числа – математическое ожидание и дисперсию. Важнейший класс случайных величин, полностью определяемых двумя первыми моментами, составляют нормально распределенные величины. Пример замены многомерных распределений изучением свойств первых моментов описан в п. 5.4, где определяются потери энергии по заданным мощностям узлов сети. Приведенные там формулы статистической линеаризации позволяют связать моменты исходных случайных величин (мощностей узлов) с моментами искомых случайных величин – напряжений.

Теоретические результаты, описанные в теории вероятности, допускают их непосредственное применение для решения прикладных задач, однако масштабы этого применения существенно ограничиваются основной предпосылкой, на которой построены предыдущие результаты: анализ случайных величин в теории вероятностей ведется на основе исчерпывающей информации об исходном вероятностном пространстве.

Любые попытки применения вероятностных результатов показывают, что при решении прикладных задач исходное вероятностное пространство не может быть задано полностью, а должно угадывать-

ся по конечным наборам своих элементов. Рассматриваемая проблема представляет собой задачу статистического анализа, по терминологии Фишера, различные подходы к решению которой составляют предмет математической статистики.

Анализ данных в математической статистике – это возможность судить об исходном вероятностном пространстве по частичной выборке его элементов. В задаче анализа можно выделить три основные части:

- оценка значений параметров по выборке;
- статистический анализ причинности;
- получение статистических критериев значимости.

Описание постановки и методов решения задач, связанных с двумя последними направлениями, достаточно хорошо и полно описано в [13], решение задачи оценки параметров по выборке излагается в основном в соответствии с [14]. Самостоятельное изучение упомянутых источников позволит глубоко разобраться в рассматриваемых вопросах. В данной главе изложены только основные понятия математической статистики, знакомство с ними позволит самостоятельно изучить более сложные понятия.

В заключение введения к предмету математической статистики рассмотрим особенности постановки третьей категории задач математической статистики.

Предсказание. Задачи этого класса составляют цель любого статистического исследования. Среди важнейших электроэнергетических задач здесь можно выделить следующие: прогнозирование электропотребления и максимальной мощности энергосистемы; прогнозирование стоимостных показателей энергосистемы, например затрат на строительство станции в зависимости от ее географического положения, вида используемого топлива и др.; прогнозирование потерь энергии; прогнозирование метеорологических условий и их влияния на энергобаланс и т. д.

Статистическое решение задач этого типа отличается некоторой ограниченностью. Статистические методы прогнозирования полностью ориентированы на информацию, которая определяется развитием процесса в прошлом, и не учитывают возможных качественных изменений, связанных, например, с новым уровнем техники, истощенностью тех или других видов энергоресурсов и др. Поэтому для полного решения вопросов, связанных с прогнозированием, необходимы комбинированные методы, использующие статистическую ин-

формацию и моделирование качественных изменений структуры прогнозируемых процессов, основанные на детальном знакомстве с рассматриваемой прикладной областью.

2.2. Анализ «по выборке». Свойства и функции выборки

Как уже отмечалось, математическая статистика изучает случайные явления на основе конечного количества элементов исходного вероятностного пространства.

Основным понятием математической статистики является **выборка**, или совокупность наблюдений какого-либо количественного показателя $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$. Если X – случайная величина, то выборка является случайным вектором. Число N называется объемом выборки. Выборка называется повторной, если компоненты вектора X независимы и одинаково распределены.

Элементы выборки по описанному выше принципу ее построения, как правило, имеют одинаковые вероятности, они образуют свое вероятностное пространство, на котором заданы выборочные значения случайной величины. Этой случайной величине соответствует выборочная функция распределения, всегда отличающаяся от реальной, часто не известной нам ФР исходной случайной величины. Задачей статистики в конечном счете является оценка исходной ФР по наблюдаемой ФР выборки.

Пример выборочной функции распределения, взятый из источника [14], приведен на рис. 2.2. Функция имеет N точек разрыва по числу элементов выборки, в каждой из которых функция увеличивается на $1/N$. Наряду с выборочной функцией распределения на рис. 2.2 приведена теоретическая функция нормального распределения случайных колебаний температур, сто точек области значений которой образовали рассматриваемую выборку. Как видно из рисунка, выборочная функция распределения хотя и отличается от теоретической, но достаточно близка к ней. Очевидно, для того чтобы обеспечить такую близость, выборка не должна определяться какой-либо зоной возможных изменений случайного параметра, а должна охватывать весь диапазон изменений, именно этим обстоятельством определяется требование независимости всех точек выборки. Напомним, что для *независимых* величин условная вероятность выбора точек из любого интервала равна абсолютной вероятности этого интервала.

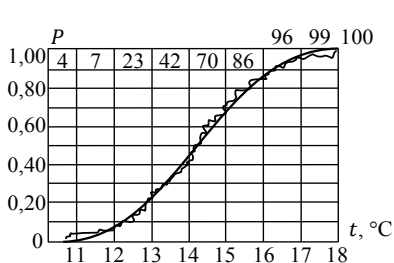


Рис. 2.2. Выборочная ФР температур

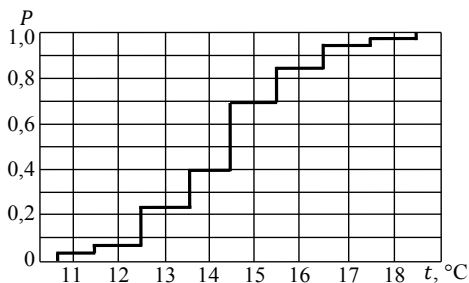


Рис. 2.3. Сгруппированная ФР

Кроме независимости выборка должна иметь достаточно большой объем, иначе маловероятные события, как говорят, «связанные с хвостами» распределения, не найдут отражения в выборке. Отмеченные здесь свойства определяют представительность выборки. Все результаты математической статистики справедливы только для **представительных** (максимально полно и адекватно описывающих характерные свойства анализируемого явления) выборок, причем, как правило, статистические приемы не доказывают, что рассматриваемая выборка является представительной, в некоторых случаях они могут только опровергнуть это утверждение. Задача получения представительной выборки определяется интуицией, информированностью и научной добросовестностью ее составителя. Часто статистическая обработка непредставительных выборок даже самыми эффективными статистическими приемами приводит к результатам, трактующим изучаемое явление абсолютно неверно.

Группировка данных. Поскольку статистические выборки обычно отличаются достаточно большим объемом, содержащаяся в них информация, как правило, подвергается группировке. Рассмотрим пример такой группировки для выборки, приведенной на рис. 2.2. Для проведения группировки область наблюдаемых значений переменной разбивается на несколько интервалов одинаковой длины. Определение разумного числа и размера этих интервалов будет рассмотрено ниже – для нашего примера используем разбивку на 9 равных по длине интервалов. Точки, попавшие в один интервал, считаются неразличимыми, каждой из этих точек присваивается единое значение выборочной случайной функции, соответствующей сере-

дине интервала. Выборочная функция распределения имеет количество разрывов, равное количеству выбранных интервалов. В каждой точке разрыва k выборочная функция распределения получает приращение, равное n_k/N , где n_k – количество точек, попавших в заданный интервал. Функция распределения для сгруппированной выборки, соответствующей рис. 2.2, приведена на рис. 2.3.

Наряду с выборочной функцией распределения для описания выборочных значений случайной величины используется также так называемая гистограмма распределения. *Гистограмма* обычно строится для сгруппированных наблюдений, она представляет собой график, на горизонтальной оси которого отложены диапазоны изменений случайной величины, а по вертикальной оси вероятности попадания в каждый диапазон p_k , равные для сгруппированных выборок отношению числа точек, попавших в диапазон k , к общему количеству N элементов выборки. Гистограмма распределения сгруппированной случайной величины, представленной на рис. 2.2, показана на рис. 2.4. Очевидно, гистограмма распределения выборки является статистическим аналогом (или моделью) функции плотности вероятности той случайной величины, из элементов которой составлена выборка.

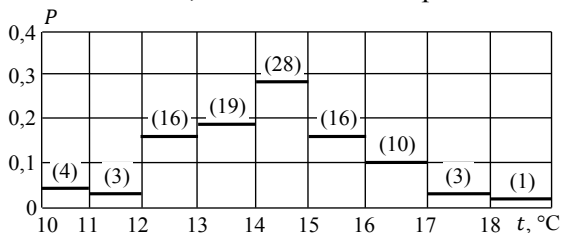


Рис. 2.4. Гистограмма распределения сгруппированной случайной величины

Выборочные значения параметров распределения. Поскольку в математической статистике моделью исходной случайной величины является выборка, полученная из ее значений, естественно для обработки, упорядочения и сжатия информации об этой модели применять те же средства, которые используются для анализа исходной случайной величины (генеральной совокупности). Основными характеристиками исходных случайных величин являются их моменты. Аналогичные величины вводятся и при рассмотрении выборок, они называются выборочными значениями моментов. В частности, для описания анализируемой случайной величины можно рассматривать

выборочное математическое ожидание (среднее по выборке) и выборочную дисперсию. Выборочные параметры обозначают следующим образом:

- среднее по выборке:

$$\bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i; \quad (2.1)$$

- выборочная дисперсия:

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2; \quad (2.2)$$

- выборочный третий центральный момент:

$$\mu_3 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^3; \quad (2.3)$$

- выборочный корреляционный момент двух случайных величин X и Y :

$$\bar{K}(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})(y_i - \bar{Y}). \quad (2.4)$$

Если исходная величина заменена представительной выборкой, естественно предположить, что выборочные значения параметров будут близки к их истинным значениям. Однако при этом следует помнить о различии между истинными и выборочными моментами случайных величин: истинные значения представляют собой характеристики, которые не зависят от способа их вычисления, в то время как выборочные значения – это случайные величины, зависящие от ряда факторов (закона распределения исходной случайной величины, размера выборки, типа момента и др.).

2.3. Точечные и интервальные оценки параметров случайных величин

Чтобы отличить оценку параметра случайной величины от самого значения параметра a , обозначим эту оценку в виде \bar{a} . Для ее получения необходимо сформировать некоторую функцию от выборочных значений $f(x_1, x_2, \dots, x_N)$. Такие функции называются статистиками. В частности, величины (2.1)–(2.4) представляют собой примеры статистик. Каким бы способом ни выполнялись оценки вероятностных параметров, необходимо стремиться к тому, чтобы они удовлетворяли следующим свойствам.

Состоятельность – это основное требование, предъявляемое к оценкам, его выполнение означает, что оценка стремится к точному значению параметра при увеличении объема выборки, т. е.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{a} = a.$$

Несмещенность – математическое ожидание таких оценок равно оцениваемому параметру:

$$E(\bar{a}) = a.$$

Эффективность – зависит от дисперсии выборочной оценки $D(\bar{a})$; чем меньше эта величина, тем меньше диапазон возможных значений \bar{a} и, следовательно, тем меньше погрешность конкретной ошибки $\Delta = \bar{a} - a$.

Для дисперсии выборочной оценки существует нижняя граница, определяющаяся объемом выборки и свойствами генеральной совокупности, для которой выполняется оценка. В частности, можно показать [14], что дисперсия любой выборочной оценки \bar{m} математического ожидания распределенной по нормальному закону $X \in N(m, \sigma)$ генеральной совокупности не может быть меньше величины σ^2/N , т. е. $D(\bar{m}) \geq \sigma^2/N$. Оценка, дисперсия которой равна ее нижней границе, называется эффективной.

Помимо точечных оценок параметров распределения в математической статистике рассматриваются также интервальные оценки. Остановимся подробно на свойствах точечных оценок МО и дисперсии и интервальных оценках этих параметров для больших выборок случайных величин.

2.3.1. Математические ожидания и дисперсии больших выборок

Большой, как правило, считается выборка, содержащая больше 20–30 элементов. К выборочным значениям математического ожидания и дисперсии, найденных по большой выборке, можно применить упомянутую в гл. 1 центральную теорему, в соответствии с которой оказывается, что выборочные оценки среднего и дисперсии независимо от того, как распределена рассматриваемая случайная величина, принадлежат классу нормальных законов распределения. Для выборочного среднего данный результат понятен непосредственно, а для выборочной дисперсии может быть доказан, например, так, как это сделано в источнике [8].

Рассмотрим выборочные значения математического ожидания и дисперсии. Для этого вычислим математические ожидания оценок данных случайных величин:

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(x_i) = E(X) = m; \quad (2.5)$$

$$D(\bar{X}) = \left(\frac{1}{N}\right)^2 D\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \frac{1}{N} \sigma^2. \quad (2.6)$$

Для определения МО выборочной дисперсии воспользуемся формальными математическими преобразованиями, принимая во внимание, что $\{x_i\}$ – совокупность независимых случайных величин с одинаковым МО $M(x_i) = m$ и дисперсией $D(x_i) = \sigma^2$.

$$\begin{aligned} E(s^2) &= E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2\right) = E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N ((x_i - m) - (\bar{X} - m))^2\right) = \\ &= \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N E(x_i - m)^2 - 2E\left((\bar{X} - m) \sum_{i=1}^N (x_i - m)\right) + NE(\bar{X} - m)^2 \right]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание (2.6), а также соотношения:

$$\begin{aligned} E(x_i - m)^2 &= \sigma^2; \\ E \sum_{i=1}^N (x_i - m) &= N(\bar{X} - m), \end{aligned}$$

получаем:

$$E(s^2) = \frac{1}{N} [N\sigma^2 - N(\bar{X} - m)^2] = \frac{1}{N} (N\sigma^2 - \sigma^2) = \frac{N-1}{N} \sigma^2. \quad (2.7)$$

Выражение для дисперсии $D(s^2)$ выборочной дисперсии приведем без вывода:

$$D(s^2) = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{N} - 2 \frac{\mu_4 - 2\sigma^4}{N^2} + \frac{\mu_4 + 3\sigma^4}{N} \approx \frac{\mu_4 - \sigma^4}{N}, \quad (2.8)$$

где μ_4 – четвертый центральный момент случайной величины X_i .

Приведенные оценки являются состоятельными, поскольку дисперсии обеих оценок ($E(\bar{X})$, $E(s^2)$) стремятся к нулю при увеличении N . Необходимо обратить внимание на то, что соотношение $\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{a} = a$ следует понимать не так, как это делается в курсе математического анализа, а как «сходимость по мере» (вероятность $p(|\bar{a} - E(a)| > \varepsilon) \rightarrow 0$). Это справедливо, поскольку при $N \rightarrow \infty$ $D(\bar{X})$ $D(s^2) \rightarrow 0$ – именно этот факт определяет сходимость по вероятности.

Оценка математического ожидания является также и несмещенной. Что же касается выборочного значения дисперсии, то здесь обнаруживается разница между математическим ожиданием оценки и оцениваемым параметром. *Такая разница обнаруживается во всех случаях, когда по одной и той же выборке определяются два или большее количество параметров исходной случайной величины.* Причина этого обстоятельства заключается в том, что случайные величины $\Delta x_1 = x_1 - \bar{X}$, $\Delta x_2 = x_2 - \bar{X}$, ..., $\Delta x_n = x_n - \bar{X}$ уже не являются независимыми. В самом деле, поскольку есть условие связи $\sum_{i=1}^N \Delta x_i = 0$, выбор первых $N - 1$ значений величин Δx_i полностью определяет последнее значение.

Можно показать, что выборке $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_N$ соответствует уже не N , а $N - 1$ – независимая случайная величина. Отмеченная закономерность проявляется при оценке любых параметров на основании выборки. Поэтому, оценивая параметры по выборке, следует учитывать не общее количество наблюдений, участвующих в выборке, а число $\ell = N - r$, где r – число параметров, уже оцененных на основании данной выборки. Указанное число ℓ называется количеством степеней свободы выборки при оценивании рассматриваемого параметра. Чтобы ликвидировать смещение параметра $s^2 X$, как правило, выборочную дисперсию определяют по формуле

$$s^2(X) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{X})^2.$$

Часто для определения выборочной дисперсии используют более удобную для обработки массивов данных и основанную на соотношении

$$\sigma^2(X) = E(X - m_X)^2 = E(X)^2 - m_X^2$$

формулу

$$s^2(X) = \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 \right) - \bar{X}^2. \quad (2.9)$$

Данная формула, по существу отражая (2.2), является смещенной оценкой дисперсии (генеральной совокупности). Отсюда для оценки дисперсии в выражении (2.9) необходимо ввести корректирующий коэффициент

$$s^2(X) = \frac{N}{N-1} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{X}^2 \right). \quad (2.10)$$

Данное замечание немаловажно при работе с существующим математическим обеспечением, например в среде Excel, где имеется

набор процедур по расчету дисперсий, в том числе и те, которые вычисляют дисперсию по формулам (2.2) и (2.10). Следует выбрать ту процедуру, которая адекватна постановке задачи. Это замечание относится и к обсуждаемым ниже корреляционным моментам.

Выборочные дисперсии (2.2) являются достаточными при сравнении колебаний случайной величины в различных выборках. Однако при работе с функциями распределений требуется оценка дисперсии σ^2 генеральной совокупности (с делением на $N - 1$).

2.3.2. Принятие статистических решений

Выполняя статистические испытания (сбор данных для их последующей статистической обработки), мы ставим задачу найти некоторые объективные закономерности, присущие исследуемому объекту (суточный график мощности имеет периоды максимальных и минимальных нагрузок, ежегодное потребление электроэнергии имеет тенденции роста), с тем, чтобы распространить эти наблюдения на будущие стратегии принятия решений.

В большей мере это относится к таким параметрам анализируемой случайной величины, как математическое ожидание и дисперсия. Выполнив 10 замеров мощности нагрузки предприятия (выборка) в период максимальной нагрузки (10 часов) рабочего дня и получив среднюю мощность и выборочную дисперсию, мы рассматриваем эти величины как математическое ожидание и дисперсию максимальной нагрузки и на основании этих статистических величин выбираем, например, сечение кабеля. Однако такое скоропалительное решение может привести к нежелательным последствиям – статистические среднее и дисперсия оказались заниженными (в эти дни не завезли сырье, и предприятие работало вполсилы). Реальная нагрузка предприятия значительно больше, и сечение кабеля должно быть также больше.

При принятии решений необходимо учитывать, что все статистические величины имеют также вероятностный характер. Это относится и к среднему, и к выборочной дисперсии. Отсюда в инженерной практике более значимым является интервальный подход. Например, на основании 10 замеров мощности мы получили среднюю мощность $\bar{P} = 250$ МВт и выборочное стандартное отклонение 20 МВт. Из этого по инженерному критерию 2σ мы делаем вывод о том, что нагрузка колеблется в пределах от 210 до 290 МВт. Поскольку $\bar{P} = 250$ – это случайная величина, то для нее можно определить все присущие слу-

чайным величинам характеристики. Теория статистики предлагает оценку ее дисперсии, $D(\bar{P}) = \sigma^2/N = 40 \text{ МВт}^2$. Отсюда по критерию $2\sigma \bar{P} \in (250 - 2\sqrt{40}, 250 + 2\sqrt{40})$, т. е. расчетный интервал изменения мощности зависит от числа наблюдений и является более (по сравнению с критерием 2σ) определенным: $\pm 12,6 \text{ МВт}$.

При оценке решений, принимаемых на основе статистических испытаний, в теории статистики существуют два взаимодополняющих подхода – «проверка статистических гипотез» и «интервальные оценки параметров».

2.3.3. Распределения Пирсона, Стьюдента, Фишера

В теории математической статистики ключевую роль играют три распределения случайных величин: Пирсона, Стьюдента, Фишера. Данные распределения позволяют выполнить интервальные оценки вычисляемых статистик, что очень важно в технических приложениях.

Распределение Пирсона, или хи-квадрат- (χ_n^2 -) распределение с n степенями свободы, описывается как распределение суммы квадратов n независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , имеющих стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1, $x_i \sim N(0, 1)$: $\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$. Сумма независимых случайных величин $\chi_n^2 = \chi_{n_1}^2 + \chi_{n_2}^2 + \dots + \chi_{n_k}^2$ (сумма сумм) с n_1, n_2, \dots, n_k степенями свободы, соответственно, подчиняется хи-квадрат-распределению с $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ степенями свободы.

Математическое ожидание и дисперсия хи-квадрат-распределения равны соответственно n и $2n$. При $n \geq 2$ это распределение имеет моду в точке $x = n - 2$ (приложение 2).

Благодаря тесной связи с нормальным распределением χ_n^2 -распределение играет важную роль в теории вероятностей и математической статистике. χ_n^2 -распределение и многие другие распределения, которые определяются посредством χ_n^2 -распределения (например, распределение Стьюдента), описывают выборочные распределения различных функций от нормально распределенных результатов наблюдений и используются для построения доверительных интервалов и статистических критериев. Так, например, для независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n с одинаковым нормальным распределением с математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 отноше-

ние s^2/σ^2 подчиняется χ_n^2 -распределению со степенью свободы $n - 1$ при любых значениях m и σ^2 .

Этот результат положен в основу построения доверительных интервалов и критерия для проверки гипотезы о неизвестном значении дисперсии в случае, когда среднее значение случайной величины также неизвестно (проверка статистических гипотез и интервальная статистическая оценка).

Имеются подробные таблицы χ_n^2 -распределения, удобные для статистических расчетов. При больших объемах выборок используют аппроксимацию χ_n^2 -распределения нормальным распределением.

Распределение t Стьюдента¹ – это распределение случайной величины

$$t = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{X}} = \frac{U}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i^2}}, \quad (2.11)$$

где случайные величины U и X независимы, $U, X_i \sim N(0, 1)$ имеют стандартное нормальное распределение, а $X \sim \chi_n^2$ – распределение хи-квадрат с n степенями свободы. Пишут $t \sim t(n)$. Нетрудно видеть, что закон распределения случайной величины t не зависит от параметров рассматриваемой генеральной совокупности, а определяется только длиной выборки. Такие случайные величины можно один раз подробно исследовать, затем табулировать, построить функции плотности распределения и доверительные интервалы, соответствующие заданным доверительным уровням.

Распределение Стьюдента симметрично. В частности если $t \sim t(n)$, то $-t \sim t(n)$.

В настоящее время распределение Стьюдента – одно из наиболее известных распределений среди используемых при анализе реальных данных. Его применяют при оценивании математического ожидания, прогнозного значения и других характеристик с помощью доверительных интервалов, при проверке гипотез о значениях математических ожиданий, коэффициентов регрессионной зависимости, гипотез однородности выборок и т. п.

Распределение Фишера. Пусть Y_1, Y_2 – две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: $Y_i \sim \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тогда распределение случайной величины

¹ Распределение Стьюдента было введено в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом.

$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

называется распределением Фишера (распределением Снедекора) со степенями свободы d_1 и d_2 . Пишут $F \sim F(d_1, d_2)$. Более подробно о данном распределении сказано в приложение 4.

2.3.4. Интервальные оценки МО

Вначале рассмотрим общий порядок определения интервальных оценок в математической статистике. На рис. 2.5 показаны математическое ожидание и симметричная функция плотности распределения некоторой случайной величины. Если задаться достаточно близким к единице **уровнем достоверности β** , то в окрестности математического ожидания MX можно найти такой интервал значений рассматриваемой случайной величины λ_β , вероятность попадания в который равна заданному уровню достоверности β . При однократном выборе случайной величины, а наша оценка представляет собой именно такой однократный выбор из диапазона возможных оценок, появление события с вероятностью ниже $\alpha = 1 - \beta$ можно считать практически невозможным, следовательно, значение оцениваемого параметра должно находиться в диапазоне $(MX - \lambda_\beta; MX + \lambda_\beta)$, где λ_β определяется в соответствии с рис. 2.5.

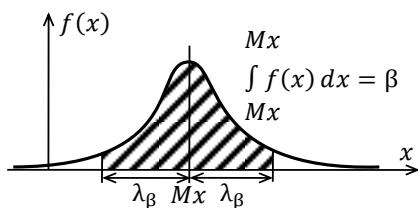


Рис. 2.5. Доверительный интервал на плотности распределения

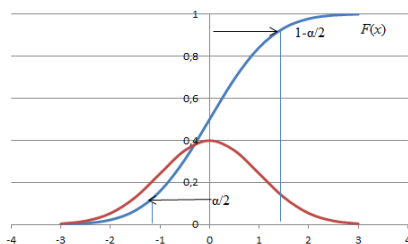


Рис. 2.6. Доверительный интервал на функции распределения

Выяснив принципиальную возможность оценивания вероятных значений случайной величины, вернемся к оценке математического ожидания, пользуясь рассмотренным приемом.

Оценка МО при известной генеральной дисперсии. Ограничимся вначале простейшим случаем, когда по выборке (x_1, x_2, \dots, x_N) оценивается только математическое ожидание, а дисперсия σ^2 известна заранее. Математическое ожидание $M(\bar{X})$ случайной величины \bar{X} , определяемой по формуле (2.1), равно m , дисперсия $D(\bar{X})$ определяется из условий независимости серии случайных наблюдений x_1, x_2, \dots, x_N :

$$D(\bar{X}) = \sigma^2 / N.$$

Чтобы проанализировать вероятный диапазон колебаний случайной величины \bar{X} , перейдем к стандартной случайной величине

$$z = \frac{\bar{X} - m}{\sigma / \sqrt{N}}.$$

Полученная величина, так же как и исходная, полностью определяется сделанной выборкой – она *распределена по стандартному нормальному закону* $z \sim N(0, 1)$. Для функции распределения такой случайной величины в справочниках приведены следующие полезные в инженерной практике величины: $F(-3) = 0,0014$; $F(-2) = 0,0228$; $F(-1) = 0,1587$; $F(0) = 0,5$; $F(1) = 0,8413$; $F(2) = 0,9772$; $F(3) = 0,9986$.

В частности, доверительный интервал $(\mp \lambda \sigma)$ при $\lambda = 1$ обладает вероятностью $\beta(1) = F(1) - F(-1) = 0,8413 - 0,1587 = 0,6826$.

После того как найден диапазон колебаний нормированной случайной величины, удобно, снова изменив масштаб, вернуться к исходной случайной величине и получить окончательную формулу для интервала вариации МО m :

$$I_\beta(m) = \left(\bar{X} - \lambda_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}}; \bar{X} + \lambda_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right). \quad (2.12)$$

Можно показать, что формула (2.12) справедлива и в случае, когда по одной и той же выборке оцениваются и математическое ожидание μ , и стандартное отклонение σ случайной величины.

Часто доверительный интервал (2.12) представляется через квантиль вероятности z_p , принятой для оценки ФР (в нашем случае это нормальное распределение),

$$I_\beta(m) = (z_{\alpha/2}; z_{1-\alpha/2}),$$

где $\alpha = 1 - \beta$ – вероятность диапазона, неприемлемого для нас в качестве доверительного для математического ожидания.

В частности для $\alpha = 0,05$ в стандартном нормальном распределении $z_{\alpha/2} = F^{-1}(0,025) = -1,96$; $z_{1-\alpha/2} = F^{-1}(0,975) = 1,96$. Эти величины часто фигурируют в математической статистике.

При достаточно большой выборке значений случайной величины с произвольным законом распределения по аналогии с МО может быть определен доверительный интервал для дисперсии

$$I_{\beta}(\sigma^2) = \left(s^2 - \lambda_{\beta} \sqrt{D(s^2)}; s^2 + \lambda_{\beta} \sqrt{D(s^2)} \right), \quad (2.13)$$

где $D(s^2)$ определяется по формуле (2.8), куда вместо истинных значений параметров можно подставить оценки. Оценки моментов четвертого и других высоких порядков по выборке обычно определяются с малой точностью, поэтому вместо непосредственного вычисления выборочных моментов четвертого порядка лучше воспользоваться выражением (1.19), которое в данном случае переписется следующим образом: $\mu_4 = 3\sigma^4$. Конечно, это соотношение справедливо только для генеральной совокупности, принадлежащей нормальному закону. Подставляя полученное выражение в (2.13), можно получить приближенную оценку

$$D(s^2) \approx \frac{2(N-1)}{N^2} s^2.$$

Малые выборки. Если объем выборки меньше 20 элементов, то при ее обработке уже нельзя воспользоваться центральной предельной теоремой и считать выборочные моменты приближенно нормальными случайными величинами. Однако если заранее известно, что анализируемая генеральная совокупность принадлежит классу нормальных распределений, то для определения диапазонов возможных колебаний математического ожидания можно рассмотреть случайную величину (статистику)

$$t = \sqrt{N}(\bar{X} - \mu)/s. \quad (2.14)$$

Напомним, что дисперсия $D(\bar{X}) = \sigma^2/N$, а статистической оценкой σ^2 является s^2 , поэтому t является выражением стандартной величины \bar{X} с заменой дисперсии на выборочную дисперсию. Приведенное выражение представляет собой частное от деления двух случайных величин. Числитель выражения распределен нормально, с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной σ^2/N . Случайная величина, находящаяся в знаменателе, статистически независима по отношению к $\bar{X} - \mu$ и имеет математическое ожидание $M(s) \approx \sigma$. Используя формулы (1.57), (1.60), можно приближенно определить математическое ожидание и дисперсию случайной вели-

чины t . Более точные расчеты дают формулы для этих параметров [10]:

$$E(t) = 0; D(t) = \ell/(\ell - 2),$$

где ℓ – количество степеней свободы случайной величины s^2 .

Нетрудно видеть, что случайная величина t в (2.14) полностью соответствует структуре формулы (2.11), т. е. описывается распределением Стюдента. Более подробно данное распределение описано в приложении 3. Дополнительную информацию о распределении можно получить, например, в [10]. Качественную информацию о плотности распределения Стюдента и доверительных интервалах λ'_β можно извлечь из рис. 2.7.

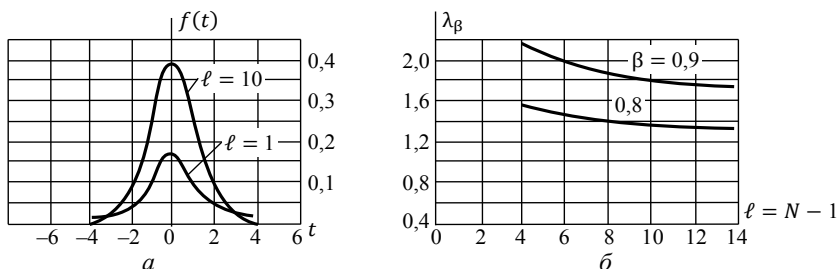


Рис. 2.7 Плотность (а) и доверительные интервалы распределения Стюдента (б)

Представим (2.14) в виде

$$\begin{aligned} t &= \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{s^2}{n}}} = \frac{\bar{X} - \mu}{\sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}} \frac{\sigma/\sqrt{n}}{\sigma/\sqrt{n}} = \\ &= \frac{(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma\sqrt{(n-1)/n}} \right)^2}}. \end{aligned}$$

В рассматриваемом случае

$$U = \frac{(\bar{X} - \mu)}{\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)}; Z_i = \frac{x_i - \bar{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n-1}{n}}}$$

При этом числитель $U = (\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n}) \sim N(0, 1)$. В знаменателе $Z_i \sim N(0, 1)$.

Подкорненное выражение знаменателя

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \sqrt{\frac{s^2}{n}} = \frac{s}{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i - \bar{X}}{\sigma \sqrt{(n-1)/n}} \right)^2}$$

представляет сумму квадратов стандартных случайных величин, то есть описывается хи-квадрат-распределением. В результате статистика $t = \sqrt{N}(\bar{X} - \mu)/s$ действительно подчиняется условиям распределения Стьюдента.

Интервалы в малых выборках играют точно такую же роль, как интервалы λ_β в больших, – они характеризуют диапазоны колебаний стандартной случайной величины:

$$t = (\bar{X} - \mu)/(s/\sqrt{N}).$$

Поэтому окончательное выражение доверительного интервала для малой выборки отличается от выражения (2.12) только тем, что вместо λ_β подставляется λ'_β , а вместо σ^2 подставляется выборочная дисперсия s^2 .

2.3.5. Интервальные оценки дисперсии

Для получения интервальной оценки дисперсии по малой выборке из нормальной генеральной совокупности введем функцию (статистику), параметры которой, как и в предыдущих случаях, определяют только длиной выборки:

$$\chi^2 = (N - 1) \frac{s^2}{\sigma^2}. \quad (2.15)$$

Рассмотренная случайная величина носит название χ^2 -распределения (описано в п. 2.3.3 и приложение 2) и имеет очень широкое применение в математической статистике. Обычно χ^2 -распределение применяется для суммы N квадратов нормально распределенных независимых величин с нулевым МО и единичной дисперсией.

Величины, образующие случайную величину (2.15), являются **зависимыми**, однако, как показано в [13], они эквивалентны $N - 1$ независимым стандартным случайным величинам. Число независимых случайных величин в распределении χ^2 называется числом степеней свободы. Иногда с учетом степеней свободы k распределение обозначается как χ_k^2 .

Графики плотности распределения χ^2 с разным количеством степеней свободы и интервалы, соответствующие различным доверительным уровням, показаны на рис. 2.8. Следует обратить внимание, что распределение χ^2 является несимметричным, оно содержит только положительные значения, поэтому для него нецелесообразно вычисление доверительных интервалов по отношению к точке математического ожидания, они будут иметь различную длину. Можно показать, что в определенном смысле наиболее разумно для несимметричного распределения найти минимальную и максимальную границы вероятных значений случайной величины $\lambda''_{\beta \min}$ и $\lambda''_{\beta \max}$ в соответствии с формулами:

$$\begin{aligned} P(\chi^2 \leq \lambda''_{\beta \min}) &= 0,5(1 - \beta); \\ P(\chi^2 \geq \lambda''_{\beta \max}) &= 0,5(1 + \beta). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Смысл приведенных формул понятен из рис. 2.8, б.

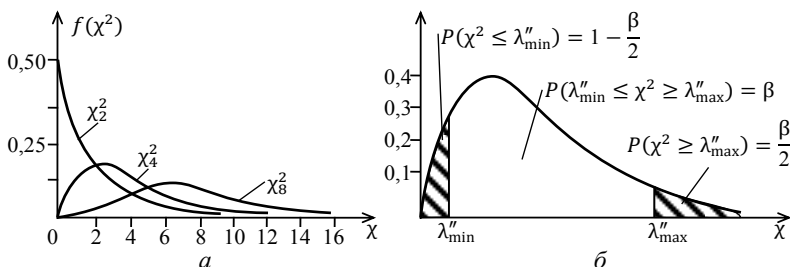


Рис. 2.8. Функции плотности χ^2 -распределения: а – плотность распределения; б – вероятность интервала

Математические ожидания и дисперсия случайной величины, распределенной по закону χ^2 , определяются по формулам [10]:

$$M(\chi_k^2) = k; D(\chi_k^2) = 2k.$$

Величины $\lambda''_{\beta \min}$ и $\lambda''_{\beta \max}$ определяют вероятные границы для случайной величины $(N - 1)s^2/\sigma^2$:

$$\lambda''_{\beta \min} \leq (N - 1)s^2/\sigma^2 \leq \lambda''_{\beta \max}.$$

Отсюда, выполняя очевидные алгебраические преобразования, находим диапазон вероятных значений для искомого параметра:

$$\frac{(N-1)s^2}{\lambda''_{\beta \text{ ma}}} \leq \sigma^2 \leq \frac{(N-1)s^2}{\lambda''_{\beta \text{ mi}}}. \quad (2.17)$$

Подробные таблицы значений для χ^2 приведены в [10], краткая информация о доверительных интервалах приводится на рис. 2.9. На рис. 2.10 приведены так называемые односторонние доверительные интервалы случайной величины χ^2 , определяемые в соответствии с условием: $\chi^2 \leq \lambda''$. Эти интервалы используются для задач проверки статистических гипотез (см. ниже).

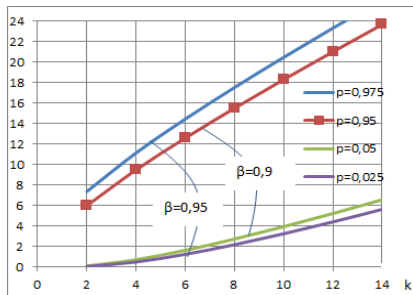


Рис. 2.9. Двусторонние доверительные интервалы для χ^2 -распределения

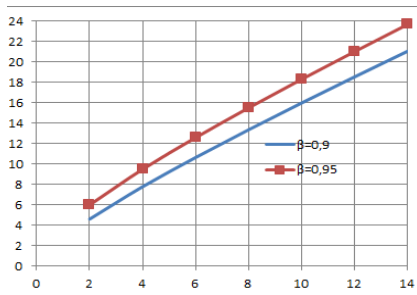


Рис. 2.10. Односторонние доверительные интервалы для χ^2 -распределения

Пример 2.1. Определение точечных и интервальных оценок параметров распределения.

Для определения среднего значения нагрузки рабочего дня в часы максимума выполнена следующая серия из пяти замеров, соответствующих всем рабочим дням недели: 17,7; 19,2; 18,0; 18,8; 18,7. Найти точечные и интервальные оценки математического ожидания и дисперсии исследуемой случайной величины. При определении доверительных интервалов задаться уровнем достоверности $\beta = 90\%$.

Решение. Точечные оценки математического ожидания и дисперсии:

$$\bar{P} = (17,7 + 19,2 + 18,0 + 18,8 + 18,7)/5 = 18,48;$$

$$s^2 = \frac{(17,7 - 18,48)^2 + (19,2 - 18,48)^2 + (18,0 - 18,48)^2}{4} + \frac{(18,8 - 18,48)^2 + (18,7 - 18,48)^2}{4} = 0,377.$$

Доверительные интервалы МО

Для нормированной случайной величины

$$t = \frac{\bar{P} - m}{s/\sqrt{5}},$$

числа степеней свободы $n - 1 = 4$ и доверительного уровня $\beta = 0,9$ (вероятность ошибки первого рода $\alpha = 1 - 0,9 = 0,1$) по графику, приведенному на рис. 2.7, по справочным таблицам или процедурам программного обеспечения (Excel-функция СТЬЮДЕНТ.ОБР.2X(0,1;4) определяется $\lambda_{0,9} = 2,13$.

Отсюда получаем следующую интервальную оценку:

$$I(m) = [\bar{P} \mp \lambda \sqrt{s^2/N}],$$

$$18,48 - 2,13\sqrt{0,377/5} = 17,89; 18,48 + 2,13\sqrt{0,377/5} = 19,06.$$

Таким образом, $m \in (17,89; 19,06)$.

Для оценки диапазона дисперсии вводим случайную величину $\chi^2 = (N - 1) s^2 / \sigma^2$, а для нее с помощью Excel-функции =ХИ2.ОБР(0,05; 4)) интервальную оценку:

$$\chi^2(P = 0,05) \leq \chi^2 \leq \chi^2(P = 0,95); 0,7 \leq \chi^2 \leq 9,5.$$

Подставляя полученные границы в формулу (2.17), находим

$$\left(\frac{4 \cdot 0,377}{9,5} = 0,159 \right) \leq \sigma^2 \leq \left(\frac{4 \cdot 0,377}{0,7} = 2,15 \right).$$

Необходимо отметить чрезвычайно широкий диапазон доверительного интервала для дисперсии.

2.4. Решение задач проверки статистических гипотез и значимости

Названные типы задач близки по своей постановке. Они связаны с проверкой тех или иных предположений о свойствах исследуемой случайной величины, сами предположения основаны на общих вероятностных законах или конкретных исследованиях рассматриваемых величин.

Статистическая гипотеза называется простой или сложной в зависимости от того, как поставлена задача. Если требуется только проверить закон распределения, гипотезу называют простой, если по

одной выборке оцениваются также и параметры распределения, гипотезу называют сложной.

Среднее. Полезно построить общую схему для испытания гипотез, отмечая сущность гипотезы и последовательность выводов. Рассмотрим данную схему применительно к выборочному МО – среднему.

Гипотеза. Средняя выборки равна заданной величине m_0 при условии, что известна σ генеральной совокупности. Двухсторонняя оценка.

Цель испытания. Подтвердить или опровергнуть гипотезу о том, что МО случайной величины равно m_0 .

Статистическая гипотеза H : $m = m_0$, σ задано. Альтернативы: $m > m_0$; $m < m_0$.

Уровень значимости α – риск отвергнуть истинную гипотезу определяется экспертной оценкой: $\alpha = 0,05$ и $\alpha = 0,01$.

Статистика для испытания гипотезы. При анализе среднего принимается во внимание, что случайная величина – среднее \bar{X} выборки из генеральной совокупности с МО m_0 и дисперсией σ^2 описывается нормальным распределением с тем же МО и дисперсией $D(\bar{X}) = \sigma^2/N$. Отсюда доверительный интервал может определяться данным распределением. В качестве статистики принимается стандартная величина $z = (\bar{X} - m_0)/(\sigma/\sqrt{N})$, $z \in N(0, 1)$.

Вероятность попадания статистики в критическую область при верной гипотезе составляет α . Для проверки гипотезы по справочникам определяются $z_{\alpha/2}$, $z_{1-\alpha/2}$. Область отторжения гипотезы $z < z_{\alpha/2}$, $z > z_{1-\alpha/2}$. При $\alpha = 0,05$, $z_{0,025} = -1,96$, $z_{0,975} = 1,96$. Гипотеза отвергается, если статистика $z < -1,96$ или $z > 1,96$. При $\alpha = 0,01$, $z_{\alpha/2} = -2,58$ и $z_{0,975} = 2,58$.

2.4.1.Проверка гипотезы о нормальном законе распределения

Достаточно частым примером статистического анализа является проверка гипотезы о том, что случайная величина, из элементов которой составлена выборка, описывается нормальным законом распределения. Такое предположение является обоснованным для широкого круга случайных величин. Рассматриваемая гипотеза является простой, поскольку мы не ставим задачу определения параметров распределения.

Предположим, что имеется *сгруппированная* выборка (гистограмма) значений рассматриваемой случайной величины X , математическое ожидание m и дисперсия σ^2 которой известны априори. *Сделано предположение*, что рассматриваемая случайная величина имеет нормальное распределение с теми же параметрами: математическим ожиданием m и дисперсией σ^2 . Если это предположение справедливо, то вероятность попадания в каждый интервал области значений выборки не должна существенно отличаться от теоретической вероятности попадания в тот же интервал нормально распределенной случайной величины (гистограмма хорошо аппроксимируется колоколообразной кривой плотности нормального распределения).

Рассмотрим вероятностный смысл нашей задачи. Наблюдаются K интервалов значений случайной величины с известной теоретической вероятностью попадания в каждый интервал. Фиксируем один из таких интервалов k , соответствующую ему теоретическую вероятность p_k и количество точек n_k , попавших в интервал (гистограмма).

При условии выполнения исходной гипотезы полученный результат можно интерпретировать следующим образом. Выполнено N экспериментов с двумя исходами: попадание или непопадание случайной величины в диапазон k . Назовем первый из таких исходов успехом, а второй – неудачей. Вероятность успеха в каждом испытании равна p_k , неудачи – $q_k = 1 - p_k$.

Поставим в соответствие каждому испытанию i случайную величину x_i , равную единице в случае успеха и нулю в случае неудачи (распределение Бернулли). Тогда случайная величина n_k представляет собой суммарное количество успехов в серии из N независимых испытаний.

Величина n_k/N при N , стремящемся к бесконечности, удовлетворяет условиям предельной теоремы Ляпунова (п. 1.3.2) и, следовательно, при достаточно большом N распределена приблизительно нормально. Определим математическое ожидание и дисперсию сначала каждой из независимых случайных величин x_i , а затем и n_k . В распределении Бернулли с вероятностью успеха p_k и неуспеха $q_k = 1 - p_k$

$$M(x_i) = 1 \cdot p_k + 0 \cdot q_k = p_k;$$

$$D(x_i) = (1 - p_k)^2 p_k + (0 - p_k)^2 q_k = p_k q_k (q_k + p_k) = p_k q_k.$$

С учетом независимости x_i (независимости испытаний) находим теоретическое среднее число попаданий в рассматриваемый интервал:

$$n_{t,k} = M(n_k) = Np_k;$$

$$D(n_k) = D\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = Np_k q_k.$$

Случайная величина $\xi_k = (n_k - Np_k)/\sqrt{Np_k q_k}$ имеет нулевое МО и единичную дисперсию. Дополнительно считаем, что она распределена по стандартному нормальному закону, т. е. $\xi_k \sim N(0, 1)$.

Рассмотренное нами построение справедливо для произвольного интервала k . Если исходная выборка состоит из независимых случайных величин, то все ξ_k , полученные для произвольных значений k , будут независимыми случайными величинами с нормальным законом распределения, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Сумма K квадратов независимых стандартных случайных величин распределена по закону χ^2 с K степенями свободы. Для любого K можно найти интервал, в котором находятся почти все значения случайной величины с точностью до принятого доверительного уровня.

Если определить соответствующее число (статистика для χ^2 распределения) для конкретной выборки:

$$L = \sum_{k=1}^K \xi_k^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(n_k - Np_k)^2}{Np_k q_k},$$

то оно окажется наблюдаемым значением рассмотренной случайной величины χ_k^2 и должно находиться в заранее определенном интервале I_β . Как же тогда трактовать случай выпадения числа из установленного интервала I_β ? Вероятно, этот факт с некоторой погрешностью $(1 - \beta)$ доказывает ошибочность нашего предположения о том, что рассматриваемая случайная величина описывается нормальным распределением с тем же МО и дисперсией.

Пример 2.2. Проверка гипотезы о нормальном распределении.

В столбцах 1–3 табл. 2.1 представлены: поинтервальное разбиение диапазона изменения переменной X ; среднее значение интервала и число случайных значений X , попавших в заданный интервал. Рассматривая столбец 3 в качестве статистических частот, нетрудно получить $MO(X) = 14,2$ и выборочную дисперсию $s^2 = 2,7$. Для проверки гипотезы о нормальном распределении необходимо получить теоретическую вероятность текущего интервала (столбец 4).

$$p_k = F(X_k, m, s) - F(X_{k-1}, m, s).$$

Таблица 2.1

Проверка гипотезы о нормальном распределении

1	2	3	4	5	6	7
10	X	n_k	p_k	n_t	σ_k^2	χ_k^2
11	10,5	4	0,02	1,90	1,87	2,35
12	11,5	3	0,06	6,19	5,81	1,75
13	12,5	16	0,14	13,96	12,01	0,35
14	13,5	19	0,22	21,86	17,08	0,48
15	14,5	28	0,24	23,78	18,12	0,98
16	15,5	16	0,18	17,96	14,73	0,26
17	16,5	10	0,09	9,41	8,53	0,04
18	17,5	3	0,03	3,43	3,31	0,05
19	18,5	1	0,01	0,87	0,86	0,02
Всего		100			χ^2	6,29
m	14,2				r	8
mX^2	205,2				$\chi^2_{\text{лев}}$	2,7
s^2	2,7				$\chi^2_{\text{пр}}$	15,5
s	1,6					

В столбце 5 (произведение столбца 4 на 100) представлено теоретически ожидаемое количество элементов X в рассматриваемом интервале, а в следующем столбце – соответствующая теоретическая дисперсия $\sigma_k^2 = Np_k(1 - p_k)$. В последнем столбце выполняются вычисления статистики $\chi^2 = \sum (n_k - n_t)^2 / \sigma_k^2$. Сумма столбца $\chi^2 = 6,29$. При числе степеней свободы $r = 9 - 1 = 8$ и уровне доверия $\beta = 0,9$ левый и правый пределы χ^2 -распределения по справочным таблицам или стандартным расчетным процедурам соответственно равны (2,7; 15,5). Поскольку расчетное значение статистики находится внутри интервала, делается вывод о непротиворечивости гипотезы о нормальном распределении рассматриваемой случайной величины.

Важно заметить, что принадлежность числа L найденному интервалу является только свидетельством того, что набор исходных данных не противоречит сделанной выше статистической гипотезе, но ни в коем случае и не доказывает ее. Подобная ситуация характерна для решения любых задач, связанных с проверкой гипотез, и представляет важнейшую особенность решения статистических задач, которая может быть сформулирована следующим образом.

Статистические методы проверки гипотез позволяют точно установить лишь отрицательный результат (неверность исходной посылки), выполнение же любых критериев проверки статистических гипотез означает лишь, что выборка не противоречит сделанным предположениям, но и не является доказательством этих предположений.

Эта особенность решения задач проверки гипотез является одной из причин того, что при решении статистических задач часто используется математический метод доказательства от противного. Сущность решения такой задачи поясним примером, связанным с решением задач статистического анализа причинности.

2.4.2. Значимость колебаний нагрузки. Распределение Фишера

При сравнении двух случайных величин используется, как правило, распределение Фишера (частное двух случайных величин, распределенных по закону χ^2 с заданными степенями свободы), выполняющее сравнение дисперсий двух популяций и позволяющее сделать заключение об их единстве или существенном различии.

Рассмотрим случайную величину колебаний мощности заданного узла нагрузки на месячном интервале. Случайная величина задана выборкой, состоящей из часовых замеров: предполагается, что они делаются каждый час и всего выполнено $30 \cdot 24 = 720$ замеров мощности.

На основе анализа суточных графиков сделано естественное предположение, что колебания мощности нагрузки определяются в значительной степени некоторыми устойчивыми факторами, зависящими от часа суток (имеет значимость конфигурация графика, то есть важным является отличие средних (для каждого часа) нагрузок). При этом в любой момент нагрузка узла может быть представлена как сумма средней нагрузки *данного часа* $P_*(t)$ и некоторого остаточного случайного колебания $\varepsilon_d(t)$, которое, естественно, предполагается значительно меньшим, чем колебания полной совокупности нагрузок. Это допущение явно или неявно используется во всех случаях, когда нагрузка моделируется с помощью суточного графика.

Таким образом, нагрузка P_{dt} дня d и часа t представляется в виде суммы МО и случайного отклонения:

$$P_{dt} = P_*(t) + \varepsilon_d(t), \quad t = 1, \dots, 24; \quad d = 1, \dots, D,$$

где D – число дней рассматриваемого периода; $P_*(t)$ – усредненные за весь наблюдаемый период нагрузки каждого часа t ,

$$P_*(t) = \frac{1}{D} \sum_{d=1}^D P_{dt}. \quad (2.18)$$

Если верна принятая гипотеза, то усредненные нагрузки $\{P_*(t)\}$ каждого часа существенно, или, как говорят в статистике, значимо, отличаются друг от друга и от общего среднего по полной ($24D$ значений) выборке

$$\bar{P} = \frac{1}{24 D} \sum_{t=1}^{24} \sum_{d=1}^D P_{dt} = \frac{1}{24} \sum_{t=1}^{24} P_*(t).$$

Следует заметить, что для нагрузки, как случайной величины из одной популяции (имеющей одно МО и единую дисперсию σ_P^2), не известно значение дисперсии σ_P^2 . Отсюда *дисперсию популяции необходимо представлять ее статистической оценкой, а возможные критерии истинности гипотезы не должны содержать σ^2 в качестве параметра.*

Одним из распределений, не содержащим σ^2 в качестве параметра, является упомянутое выше распределение Фишера, которое, как правило, применяется для сравнения выборочных дисперсий двух случайных величин и отвечает на вопрос, с какой вероятностью можно утверждать, что рассматриваемые выборки принадлежат одной популяции.

В результате доказательство значимости отличия величин $P_*(t)$ друг от друга (при одной популяции $P_*(t) \approx \bar{P}$) можно выполнить, сравнивая между собой выборочные *дисперсии исходных* P_{dt} (относительно \bar{P}) и *остаточных* $\varepsilon_d(t)$ (относительно $P_*(t)$) случайных величин. Если эти дисперсии незначимо отличаются друг от друга, то можно говорить, что фактор часовой индивидуальности нагрузки является сомнительным. Итак, вывод здесь делается на основе сравнения выборочных дисперсий.

В рассматриваемой постановке акцент ставится на принадлежности разных выборок одной популяции. Следовательно, заключение об истинности исходной гипотезы следует проводить методом «от противного». Для этого введем гипотезу, противоположную основному предположению, или «нулевую гипотезу», в соответствии с которой усредненные случайные величины $P_*(t)$ *незначимо* отличаются

друг от друга и от общего выборочного среднего \bar{P} , представляя различные оценки математического ожидания, т. е.

$$M(P_*(t)) = M(\bar{P}) = MP, t = 1, \dots, 24.$$

Если верна нулевая гипотеза, то случайные величины

$$\xi_d(t) = \frac{\varepsilon_d(t)}{\sigma_P} = \frac{P_{dt} - P_*(t)}{\sigma_P} \quad (2.19)$$

принадлежат нормальному закону распределения с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Для рассматриваемых случайных величин предварительно должны быть вычислены 24 величины $P_*(t)$, т. е. случайные величины $\xi_d(t)$ (всего их $24 \cdot D$) связаны 24 линейными условиями вида (2.18). Поэтому они эквивалентны многомерной стандартной случайной величине размерности $24(D - 1)$. Сумма квадратов случайных величин (2.19) распределена по закону χ^2 с $24(D - 1)$ степенями свободы

$$\begin{aligned} \chi_E^2 &= \sum_{t=1}^{24} \sum_{d=1}^D \xi_d^2(t) \\ &= (D - 1) \sum_{t=1}^{24} \frac{1}{(D - 1)} \sum_{d=1}^D \frac{(P_{dt} - P_*(t))^2}{\sigma_P^2} = \frac{(D - 1)}{\sigma_P^2} \sum_{t=1}^{24} s_{*t}^2. \end{aligned}$$

В этой формуле четко просматривается сопоставление внутрис часовых (s_{*t}^2) и обобщенной (σ_P^2) дисперсий. Будем называть сумму квадратов отклонений от часовых средних внутрис часовыми колебаниями и обозначать

$$SS_E = \sum_{t=1}^{24} \sum_{d=1}^D (P_{dt} - P_*(t))^2.$$

При этом сумма квадратов стандартных случайных величин (согласно гипотезе P_{dt} имеет дисперсию σ_P^2)

$$\chi_E^2 = \frac{SS_E}{\sigma_P^2} = \sum_{t=1}^{24} \sum_{d=1}^D \frac{(P_{dt} - P_*(t))^2}{\sigma_P^2} = \frac{(D - 1)}{\sigma_P^2} \sum_{t=1}^{24} s_{*t}^2 \quad (2.20)$$

подчиняется $\chi^2(r_E)$ распределению с $r_E = 24(D - 1)$ степенями свободы.

С другой стороны, случайные величины $P_*(t)$ (часовые средние) также распределены по нормальному закону и, если справедлива нулевая гипотеза, имеют дисперсию σ_P^2/D (усреднение D чисел с оди-

наковой дисперсией). Напомним, здесь D – число (30) дней в рассматриваемом периоде, а σ_P^2 – дисперсия нагрузки как единой популяции.

Сумма квадратов отклонений среднечасовых средних от общего среднего по всей выборке называется межчасовыми колебаниями, для нее введено обозначение

$$SS_H = \sum_{t=1}^{24} (P_*(t) - \bar{P})^2.$$

Сумма квадратов нормированных случайных величин (P_{*t} имеет дисперсию σ_P^2/D)

$$\chi_H^2 = \frac{SS_H}{\sigma_P^2/D} = \frac{23}{23} \sum_{t=1}^{24} \frac{(P_*(t) - \bar{P})^2}{\sigma_P^2/D} = 23 D \frac{s_{**}^2}{\sigma_P^2} \quad (2.21)$$

распределена по закону $\chi^2(r_H)$ с $r_H = 24 - 1 = 23$ степенями свободы.

Для статистической проверки нулевой гипотезы используется отношение (статистика) введенных нами двух распределений χ^2 , которое легко можно привести к виду

$$F_{23,24(N-1)} = \frac{\chi_H^2}{\chi_E^2} = D \frac{SS_H}{SS_E} = \frac{23 D}{(D-1)} \cdot \frac{s_{**}^2}{\sum_{t=1}^{24} s_{*t}^2}.$$

Как было ранее сказано, распределение дроби, в числителе и знаменателе которой стоят χ^2 -распределения независимых между собой компонент, описывается распределением Фишера (F -распределение). Математическое ожидание F -распределения равно

$$MF_{r_1, r_2} = \frac{r_2}{r_2 - 2} = \frac{24(D-1)}{24(D-1) - 2}.$$

Подробные таблицы данного распределения приведены в источнике [10], график плотности распределения одной из случайных величин этого класса представлен на рис. 2.11.

Для проверки нулевой гипотезы необходимо вычислить значение случайной величины $F_{23,24(N-1)}$, соответствующее проведенной выборке. Если найденная величина превосходит границу $\lambda_{F,\beta}$, определяющую область вероятных значений $F_{23,24(N-1)}$, то нулевая гипотеза не верна, а исходное предположение является верным и моделирование нагрузки суточным графиком имеет смысл.

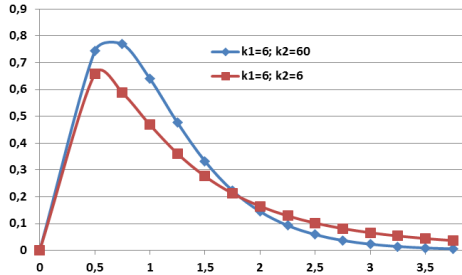


Рис. 2.11. Плотность распределения Фишера

Пример 2.3. Значимость часового разнообразия нагрузок.

МО суточного графика нагрузок (генеральная совокупность) представлены на рис. 2.12. Результаты наблюдений отображены в табл. 2.2. Две последние строки таблицы – соответственно средние значения и выборочные дисперсии столбцов. Среднее значение всей таблицы данных составляет $m = 0,745$. Величина статистики χ_E^2 , определяемой по формуле (2.20) путем суммирования строки s^2 , умноженной на длительность интервалов,

$$\chi_E^2 = \frac{SS_E}{\sigma_P^2} = \frac{(D-1)}{\sigma_P^2} \sum_{t=1}^{24} s_{*t}^2 = \frac{2,72}{\sigma_P^2}.$$

Дисперсия постолбцовых средних $s_{**}^2 = 0,0446$. Отсюда определяемая по формуле (2.21) вторая статистика

$$\chi_H^2 = \frac{23 D s_{**}^2}{\sigma_P^2} = \frac{10,27}{\sigma_P^2}.$$

В результате статистика Фишера

$$F_{23,24(N-1)} = \chi_H^2 / \chi_E^2 = 3,775.$$

Из таблиц F -распределения находим верхнюю границу диапазона вероятных значений функции $F_{23,216}$ при $\beta = 0,95$ $\lambda_{F,0,95} = 1,6$. Поскольку наблюдаемое значение $F = 3,775$ для рассмотренной выборки не укладывается в интервал $(0-1,6)$, нулевая гипотеза неверна. Следовательно, наше исходное предположение является обоснованным и игнорировать конфигурацию суточного графика мощностей нельзя.

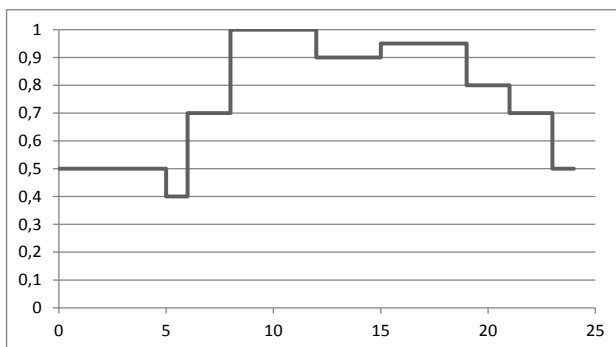


Рис. 2.12. График нагрузки предприятия

Таблица 2.2

Выборка графиков нагрузки

Дни	Интервалы постоянства нагрузок, ч								
	5	1	2	4	3	4	2	2	1
1	0,407	0,573	0,716	0,906	1,097	0,916	0,844	0,601	0,462
2	0,678	0,595	0,551	0,915	0,850	0,860	0,696	0,779	0,577
3	0,392	0,301	0,529	0,890	0,840	0,818	0,666	0,832	0,364
4	0,405	0,390	0,856	1,158	0,914	0,941	0,988	0,650	0,602
5	0,381	0,358	0,540	0,916	0,869	1,027	0,729	0,637	0,555
6	0,645	0,548	0,565	1,080	0,803	0,770	0,706	0,886	0,522
7	0,418	0,596	0,750	1,135	0,922	0,940	0,616	0,880	0,331
8	0,322	0,337	0,701	1,095	0,883	1,054	0,740	0,536	0,571
9	0,507	0,515	0,542	0,917	1,000	0,885	0,677	0,556	0,405
10	0,489	0,429	0,857	1,057	0,712	1,069	0,667	0,645	0,505
m_t	0,464	0,464	0,661	1,007	0,889	0,928	0,733	0,700	0,489
s^2	0,0136	0,0129	0,0174	0,0115	0,0112	0,0099	0,0117	0,0175	0,0090

3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Методы оценки параметров случайных величин в математической статистике занимают особое место, составляя основу математической теории обработки наблюдений, наиболее важной в прикладном отношении ветви математической статистики.

К этому разделу принадлежит большое количество статистических задач энергетики, и в частности: задача предсказания выработки энергии на предстоящий период; моделирование графика нагрузки на

следующие сутки; корректировка рассчитанного по прогнозным данным режима энергосистемы и т. п.

Простейшие примеры оценки параметров распределения по выборке были даны во второй главе. Представляют интерес два универсальных метода такого рода: максимального правдоподобия и наименьших квадратов. Для наиболее интересного в приложениях теории вероятности случая выборки из многомерного нормального распределения метод наименьших квадратов вытекает из метода максимального правдоподобия, поэтому рассмотрим идею, порядок использования и свойства первого из упомянутых методов, затем разномобразные случаи его применения для нормальных распределений и, наконец, покажем эквивалентность методов.

3.1. Метод максимального правдоподобия

Статистический метод оценивания параметров $\theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ по выборке наблюдаемых значений случайных величин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, удовлетворяющей условиям независимости и представительности, как и многие другие статистические методы, использует простейшую идею, смысл которой заключается в том, что одно и то же следствие может иметь множество причин, и задача исследователя заключается в том, чтобы выбрать из этого множества наиболее вероятную версию.

Для решения этой задачи в теории статистики разработан метод максимального правдоподобия (*maximum likelihood estimation*) – метод оценивания неизвестного параметра путем максимизации функции правдоподобия.

Основанный на предположении о том, что вся информация о статистической выборке содержится в функции правдоподобия, данный метод был развит и значительно популяризирован Рональдом Фишером (1922 г.), хотя ранее он использовался Гауссом, Лапласом и другими математиками.

Швейцарский математик Габриэль Крамер (1704–1752 гг.), ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры сформулировал следующую теорему:

не существует другого метода обработки результатов эксперимента, который дал бы лучшее приближение к истине, чем метод максимального правдоподобия.

Прежде чем четко сформулировать смысл и порядок применения метода максимального правдоподобия, проанализируем пример,

заимствованный нами из источника [16]. Пусть имеются две урны, каждая из которых содержит белые и черные шары. Относительное количество белых шаров в урнах определяется номером или значением параметра в каждой из них. Для урны со значением параметра $\alpha = 1$ на каждый белый шар приходится по три черных. Для урны со значением $\alpha = 2$ на каждый черный шар приходится по три белых шара. Урны не имеют этикеток, и вероятное значение параметра α предполагается установить на основании трех опытов, в которых из урны извлекают по шару. Предполагается, что в эксперименте соблюдены условия независимости опытов (шары в урнах хорошо перемешаны и выбор шара выполняется «с возвращением», т. е. перед следующим экспериментом шар возвращается в урну). В случае независимости выборки вероятность выборки k шаров черного цвета $p(k, a)$ зависит от значения a . Для определения $p(k, a)$ целесообразно использовать формулу биномиального распределения:

$$p(k, a) = C_3^k p_a^k (1 - p_a^k)^{3-k}, \quad (3.1)$$

где p_a – вероятность выбора черного шара, зависящая от значения параметра $a = 1, 2$ и равная $p_1 = 3/4$; $p_2 = 1/4$; C_3^k – число сочетаний по k элементов из трех.

В табл. 3.1 приведены значения $p(k, a)$ для всех возможных значений k и a . Как видно из таблицы, эксперимент позволяет довольно уверенно установить значение параметра. Правда, получаемый результат, как и все выводы математической статистики, имеет вероятностный характер и, например, при $k = 0$ позволяет утверждать, что данный исход в 27 раз более вероятен для первого значения параметра $a = 1$, чем для второго. Используя правило, приведенное в начале пункта, разумно оценить значение $a = 1$.

Таблица 3.1

Вероятность выбора черных шаров в трех опытах

a	p	k			
		0	1	2	3
1	$p(k, 1)$	1/64	9/64	27/64	27/64
2	$p(k, 2)$	27/64	27/64	9/64	1/64

Оценки параметров распределений методом максимального правдоподобия

Рассмотрим непрерывные функции распределения, обладающие дифференцируемой плотностью распределения $f(X)$. Наиболее характерным примером таких распределений является нормальное.

В общем виде задача оценивания параметров по выборке ставится следующим образом [14]. Пусть имеется представительная независимая выборка $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ с совместной плотностью вероятности

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (3.2)$$

Плотность вероятности выборки в математической статистике принимается в качестве функции правдоподобия выборки. На основании выборки (x_1, x_2, \dots, x_N) необходимо оценить наиболее вероятные значения параметров $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$. Для оценки параметров составляется n соответствующим образом выбранных функций наблюдений: $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$, $i = 1, \dots, n$ (статистики). Способ получения статистик и определения на их основе оценок параметров зависит от постановки задачи и представляет сущность того или иного метода оценки.

В методе максимального правдоподобия в качестве $g_i(x_1, x_2, \dots, x_N)$ используются производные функции (3.2),

$$g_i(x_1, x_2, \dots, x_N) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = 0, \quad (3.3)$$

$$i = 1, \dots, n.$$

Когда функция имеет единственный экстремум, точка, удовлетворяющая уравнениям (3.3), определяет максимум функции $L(X, \theta)$, а если в качестве $L(X, \theta)$ рассматривается плотность распределения вероятностей, то области максимума плотности соответствует зона максимальной вероятности (правдоподобия) события, что и оправдывает название метода.

Очевидно, что для определения максимума произвольной функции $F(X)$ можно искать максимум любой монотонной функции вида $\varphi(F(X))$. Такой прием часто позволяет существенно упростить алгоритмы получения оптимальных оценок, поскольку для независимых выборок он дает возможность перейти от произведений к суммам.

Для **независимых** наблюдений с функциями плотностей вероятностей $f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ имеем:

$$L(X, \theta) = \prod_{i=1}^N f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (3.4)$$

Рассмотрим логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ell(X, \theta) = \ln L = \sum_{i=1}^N \ln f(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n). \quad (3.5)$$

В частности, для функции нормального распределения, имеющего важнейшее значение для приложений, имеем:

$$\begin{aligned} \ell(X, \theta) &= \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp \left(-\frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \right) = \\ &= -\frac{N}{2} \ln(2\pi) - \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) - \sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m_i)^2}{2\sigma_i^2}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Оценки, получаемые по методу максимального правдоподобия, как правило, обозначаются в виде $\{\hat{\theta}_i\}$.

Метод максимального правдоподобия позволяет эффективно оценивать параметры при выполнении условий, которые формулируются здесь для *простейшего случая скалярного параметра a* [14]:

а) логарифмическая функция правдоподобия $\ell(X, a)$ непрерывна вместе с двумя своими производными для любых x_i и для всех \hat{a} в интервале, заключающем оцениваемое значение параметра a ;

б) существует и отличная от нуля величина, называемая информацией о параметре a :

$$I(a) = E \left(\frac{\partial^2 L}{\partial a^2} \right). \quad (3.7)$$

Необходимость первого условия применения функции правдоподобия очевидна и совпадает с аналогичными условиями во всех случаях нахождения экстремума функции с помощью производных. Второе условие получения оптимальных оценок связано с вероятным интервалом получения оценки. Оказывается, величина, обратная $I(a)$, определяет дисперсию оценки параметра a . Нулевому значению $I(a)$ соответствуют оценки с бесконечно большой дисперсией, т. е. недопустимые.

При выполнении сформулированных выше условий оценки, полученные по формуле (3.3), обладают следующими свойствами:

1. Всякое решение $\hat{\theta}$ уравнения (оценивается 1 параметр) правдоподобия (3.3) дает максимум функции правдоподобия с вероятностью, стремящейся к единице при $N \rightarrow \infty$;
2. Решение уравнения правдоподобия будет асимптотически нормальным со средним $\bar{\theta}$;
3. Решение $\hat{\theta}$ является асимптотически эффективным.
4. Если для параметров $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n$ существуют совместно эффективные оценки $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n$, то уравнения максимального правдоподобия (3.3) имеют одно решение.

При векторном представлении оцениваемых параметров информация о параметре (3.7) преобразуется в информационную матрицу

$$I(\theta) = E(g(\theta)g(a\theta)^T).$$

В оптимальной точке информационная матрица совпадает с математическим ожиданием гесса, взятым со знаком минус:

$$I(\theta) = -E(H_0).$$

Погрешность оценки параметров

Наиболее часто в технических приложениях задача оценивания параметров ставится в такой форме: выполнен ряд измерений одной или нескольких наблюдаемых или прогнозируемых величин y_1, y_2, \dots, y_N . Наблюдения величин y_i содержат погрешности, определяемые некоторыми факторами, т. е. между наблюдениями Ly_i и самими величинами y_i имеется зависимость:

$$Ly_i = y_i + \varepsilon_i, \quad (3.8)$$

где ε_i – независимые случайные величины с нулевым математическим ожиданием и одинаковой дисперсией σ^2 , численное значение которой может быть неизвестным, т. е.:

$$E(\varepsilon_i) = 0; \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0; \sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1, \dots, N. \quad (3.9)$$

Допущения означают, что выполняемые наблюдения проводятся независимо друг от друга, не имеют систематической погрешности и обладают примерно одинаковой точностью.

Задачи статистической оценки параметров вида (3.8) делятся на два больших класса – в первом из них оцениваемыми параметрами являются сами измеряемые величины y_i . Этот класс задач называется прямыми измерениями. В таких задачах для оценки каждого параметра y_i выполняется серия избыточных наблюдений, т. е. для каждого значения y_i выполняется своя независимая серия из N_i наблюдений. При этом принимается:

$$Ly_{ij} = y_i + \varepsilon_{ij}; E(\varepsilon_i) = 0; \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0; \sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2. \quad (3.10)$$

Решение задачи оценки параметра для случая прямых наблюдений приводит к очевидным оценкам типа выборочного среднего:

$$\hat{y}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} Ly_{ij}.$$

Эти задачи не представляют большого интереса для приложений и в дальнейшем рассматриваться не будут.

Значительно больший интерес представляет так называемая задача с косвенными наблюдениями. В ней оцениваемые параметры $\{a_j\}$ не наблюдаются непосредственно, а определяются косвенно на основе переопределенной системы уравнений:

$$y_i = \sum_{j=1}^n x_{ij} a_j, \quad i = 1, \dots, N; \quad j = 1, \dots, n; \quad n < N, \quad (3.11)$$

или в матричном виде

$$Y = XA, \quad Y^* = XA + \varepsilon, \quad \dim(X) = (N, n), \quad n < N.$$

Здесь X – матрица постоянных величин (например, матрица проводимостей), связывающих измеряемые и оцениваемые величины, физическая природа которых может быть самой разнообразной в зависимости от решаемой задачи.

3.2. Задачи оценки параметров распределений

Чтобы оценить широту, разнообразие и универсальный характер модели оценивания параметров с косвенными наблюдениями, рассмотрим несколько типичных примеров постановки такого рода задач, в том числе и из области электроэнергетики.

3.2.1. Параметры нормального распределения

Рассмотрим задачу оценки МО и дисперсии генеральной совокупности при некоторой выборке случайной величины, описываемой нормальным распределением. Пусть $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ – независимая выборка из нормального распределения с неизвестными средним и дисперсией. Построим оценку максимального правдоподобия ($\hat{m}, \hat{\sigma}^2$) для параметров распределения. Плотность совместного (совокупность независимых случайных величин) нормального распределения

$$f(X, m, \sigma^2) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Функция правдоподобия (логарифм $f(x_1, \dots, x_N)$)

$$\ell(X, m, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2.$$

Чтобы найти ее максимум, приравняем к нулю частные производные:

$$\frac{\partial}{\partial m} \ell(X, m, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N (x_i - m) = -\frac{Nm}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N x_i = 0.$$

Откуда

$$\hat{m} = \bar{X} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \text{выборочное среднее};$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ell(X, m, \sigma^2) = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2 = 0.$$

В результате оценка дисперсии

$$\hat{\sigma}^2 = S^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^2$$

есть не что иное, как выборочная дисперсия.

3.2.2. Обработка эксперимента

Расширим постановку предыдущего примера. Предположим, что в каждом из измерений $i = 1, \dots, N$ присутствует ошибка, выраженная через индивидуальное стандартное отклонение σ_i .

Вероятность того, что значения x_1, \dots, x_N множества примут величину m (совместная плотность вероятности или функция правдоподобия), будет:

$$f(X, m) = \prod_{i=1}^N (2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{(x_i - m)^2}{2\sigma_i^2}\right).$$

Если выборочное множество фиксировано, то функция правдоподобия является функцией одного аргумента (измеряемой величины m). Наиболее вероятное значение измеряемой величины \hat{m} определяется по максимуму логарифмической функции правдоподобия:

$$\ell(X, m) = \sum_{i=1}^n (2\pi\sigma_i^2)^{-\frac{1}{2}} - \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)^2}{2\sigma_i^2}.$$

Продифференцируем логарифмическую функцию правдоподобия по m :

$$\frac{\partial}{\partial m} \ell(X, m) = \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - m)}{\sigma_i^2} = 0.$$

Отсюда

$$\hat{m} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}.$$

3.2.3. Ошибки измерений

Первая магическая формула. Предположим, что мы провели серию измерений и получили статистическую оценку a^* параметра a . Естественно предположить, что это распределение будет иметь гауссовский вид:

$$L(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{a^*}} \exp\left(-\frac{(a^* - a)^2}{2\sigma_{a^*}^2}\right).$$

Запишем логарифмическую функцию правдоподобия:

$$\ell(a) = \ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{a^*}} - \frac{(a^* - a)^2}{2\sigma_{a^*}^2}.$$

Возьмем первую производную:

$$\frac{\partial \ell}{\partial a} = \frac{a^* - a}{\sigma_{a^*}^2}.$$

Приравняв эту производную к нулю, получаем: $a = a^*$.

Теперь возьмем вторую производную:

$$\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} = -\frac{1}{\sigma_{a^*}^2},$$

откуда

$$\sigma_{a^*}^2 = -\frac{1}{\frac{\partial^2 \ell}{\partial a^2} \Big|_{a=a^*}}.$$

Данное выражение называется первой магической формулой. Оно определяет дисперсию оценки параметра.

3.2.4. Условный метод максимального правдоподобия

Условный *метод максимального правдоподобия* (*Conditional ML*) (ММП) используется в регрессионных моделях. Суть метода заключается в том, что используется не полное совместное распределение всех переменных (зависимой и регрессоров), а только *условное* распределение зависимой переменной по факторам, то есть фактически распределение случайных ошибок регрессионной модели. Полная

функция правдоподобия есть произведение «условной функции правдоподобия» и плотности распределения факторов. Условный ММП эквивалентен полному варианту ММП в том случае, когда распределение факторов никак не зависит от оцениваемых параметров. Это условие часто нарушается в моделях временных рядов, например в авторегрессионной модели (АР-модели). В данном случае регрессорами являются прошлые значения зависимой переменной, а значит, их значения также подчиняются той же модели, то есть распределение регрессоров зависит от оцениваемых параметров. В таких случаях результаты применения условного и полного метода максимального правдоподобия будут различаться.

3.2.5. Оценивание параметров установившегося режима

Пример 3.1. Для сети постоянного тока, схема которой показана на рис. 3.1, требуется согласовать между собой замеры токов нагрузок и линий и получить на основе этих расчетов наиболее достоверные сведения о напряжениях узлов. При выполнении расчета точность измерения всех токов принимается одинаковой, а систематическая погрешность измерений считается равной нулю. Напряжение балансирующего узла принято равным единице.

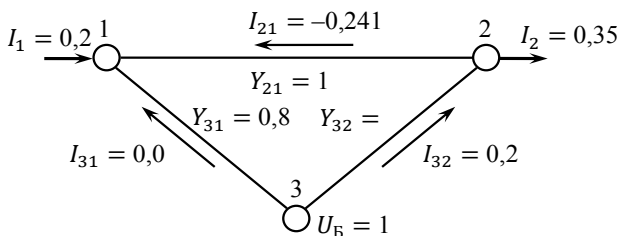


Рис. 3.1. Схема сети для задачи оценивания параметров режима

Замеры токов нагрузок и линий обозначим соответственно LI_i , LI_{ij} . Сами же значения соответствующих величин будем записывать, как обычно, I_i , I_{ij} . Отклонения напряжений узлов от базисного обозначим ΔU_i . Тогда, выписывая уравнения узловых напряжений и уравнения закона Ома для всех ветвей сети, получим систему из пяти линейных уравнений:

$$\begin{aligned} LI_1 &= -(Y_{12} + Y_{13})\Delta U_1 + Y_{12}\Delta U_2 + \varepsilon_1; \\ LI_2 &= -(Y_{12} + Y_{23})\Delta U_2 + Y_{12}\Delta U_1 + \varepsilon_2; \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} LI_{21} &= Y_{12}(\Delta U_2 - \Delta U_1) + \varepsilon_3; \\ LI_{31} &= Y_{13}(\Delta U_3 - \Delta U_1) + \varepsilon_4; \\ LI_{32} &= Y_{23}(\Delta U_3 - \Delta U_2) + \varepsilon_5. \end{aligned}$$

В этой системе уравнений величины LI_i , LI_{ij} представляют собой наблюдения, ΔU_i – искомые параметры, ε_i – погрешности определения токов. При наличии погрешностей измерений величины U_i не могут быть определены точно, они могут только оцениваться. Оценки $\Delta \hat{U}$ представляют собой случайные величины, которые могут быть найдены методом максимального правдоподобия.

Коэффициенты при искомым параметрах, соответствующие элементам x_{ij} общей записи (3.11), в нашем случае представляют собой известные постоянные коэффициенты и определяются детерминированными связями между переменными (законом Ома и уравнениями узловых напряжений).

Здесь представлена только математическая постановка задачи. Ниже будет приведен численный пример.

Пример 3.2. Рассмотрим задачу прогнозирования электропотребления или мощности на заданный промежуток времени. Для решения этой задачи разумно изучить динамику поведения прогнозируемой системы на предшествующем периоде и затем с большим или меньшим основанием перенести замеченную на предыдущем интервале тенденцию развития системы на будущее. Анализируя изменения интересующего нас параметра в прошлом, необходимо учитывать его случайный характер и постараться не слепо копировать поведение параметра в будущем, а выделить наличие тенденции на фоне случайных колебаний. Тенденция изменения параметра прогнозируется на основе некоторой гладкой функции, например многочлена первой или второй степени, тригонометрического многочлена и т. п.

В качестве конкретного примера рассмотрим задачу прогнозирования месячных максимумов нагрузки узла на предстоящий год на основании аналогичных замеров предыдущих лет.

Предварительный анализ графиков нагрузки позволяет выделить два довольно устойчивых фактора, характерных для каждого из них: графики имеют периодическую составляющую с периодом в 1 год и максимумом, приходящимся на начало и конец года, и постоянный линейный тренд, ведущий к увеличению средней величины нагрузки.

Эти свойства определяют модель изменения месячных максимумов:

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \cos \frac{2\pi t}{T}, \quad (3.13)$$

где t – момент времени, соответствующий моделированию; T – период колебания максимумов, равный одному году.

В рассматриваемой модели параметры a_0 , a_1 , a_2 оцениваются на основании обучающей выборки, характеризующей изменение максимумов в прошлом, т. е. для оценки параметров используются замеры мощностей LP_i для моментов t_i обучающей выборки. В результате для оценки параметров a_0 , a_1 , a_2 получаем систему уравнений:

$$LP_i = a_0 + a_1 t_i + a_2 \cos \frac{2\pi t_i}{T} + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.14)$$

В системе уравнений (3.14) коэффициентам x_{ij} систем уравнений вида (3.11) соответствуют значения моделирующих тенденцию функций, вычисленные в контрольных точках t_i . Отметим еще одно различие между этими задачами. В первой из них случайный характер связей, выраженных уравнениями (3.11), определяется только погрешностями измерений мощности, сами же соотношения между токами и напряжениями полностью детерминированы. Во второй задаче случайный характер величин определяется в основном не погрешностями измерений, а процессом потребления нагрузки, зависящим от большого числа случайных факторов. Соотношения (3.14) уже не являются отражением детерминированных связей, они улавливают только основную тенденцию изменения рассматриваемых величин.

Пример 3.3. Рассмотрим задачу определения параметров, когда не только исходные (наблюдаемые) величины y_i , но и определяющие эти величины факторы имеют случайный характер. Примером такого рода ситуации является следующая постановка задачи анализа потерь энергии.

Предварительный анализ показал, что величина потерь энергии в основном зависит от следующих факторов: суммарной нагрузки системы X_1 , перетоков из энергосистемы в соседние (для определенности будем считать, что таких перетоков два: X_2 , X_3), выдачи мощности двумя основными электростанциями системы X_4 , X_5 . Каждая из мощностей представляет собой случайную величину, а их совокупность – случайный вектор. Для выявления связей между величинами следует получить представительную независимую выборку $\{Ly_j, x_{ij}, i = 1, \dots, 5; j = 1, \dots, N\}$, в каждой точке которой, в соответствии со сделанным нами предположением, справедливо соотношение

$$Ly_j = \sum_{i=1}^5 a_i x_{ij} + \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, N. \quad (3.15)$$

Оценке подлежат параметры a_i , отражающие связь между факторами X_i , определяющими изменение величины потерь энергии. Коэффициенты x_{ij} представляют собой значения случайных величин X_i в полученной выборке.

3.3. Оптимизационная постановка метода максимального правдоподобия

3.3.1. Получение точечных оценок параметров

В задаче оценки параметров $a_j, j = 1, \dots, n$ ошибки измерений $\varepsilon_i, i = 1, \dots, N$ (N – число измерений в системе) представляют собой независимые случайные величины с нулевым средним и одинаковой дисперсией σ^2 .

Рассмотрим соотношения метода максимального правдоподобия для простейшего случая, когда ошибки подчинены нормальному закону распределения. Функция правдоподобия L принимает вид:

$$L = f(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N) = \prod_{i=1}^N f(\varepsilon_i) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{N/2}} \prod_{i=1}^N e^{-\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}}. \quad (3.16)$$

Для определения условий максимума целесообразно перейти к логарифмической функции правдоподобия

$$\ell = \ln L = -\frac{N}{2} \ln(2\pi\sigma^2) - \sum_{i=1}^N \left(\frac{\varepsilon_i^2}{2\sigma^2} \right). \quad (3.17)$$

При фиксированной величине дисперсии условие максимума функции правдоподобия совпадает с условием минимума величины:

$$\begin{aligned} \min \left(\Phi = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2 \right) &= \min \sum_{i=1}^N \left(y_i - \sum_{j=1}^n x_{ij} a_j \right)^2 = \\ &= \min[(Y - XA)^T (Y - XA)]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Выражение (3.18) называется условием наименьших квадратов. Оно может использоваться для оценки параметров $\{a_j\}$ и независимо от метода максимального правдоподобия – просто в случае нормального распределения оценки, получаемые по методу наименьших квадратов и по методу максимального правдоподобия, совпадают.

Выражение (3.18) представляет собой выпуклую функцию оцениваемых параметров $\{a_j\}$, условия минимума которой совпадают с условиями равенства нулю всех производных $\partial\Phi/\partial a_j$.

Для более удобного представления коэффициентов уравнения (3.18) используем его матричную запись. Для этого введем следующие обозначения: L – вектор исходных наблюдений y_i (содержит N компонент); \hat{A} – вектор оценок параметров; ε – вектор погрешностей наблюдений; $X = x_{ij}$ – матрица с N строками и n столбцами. Тогда условие (3.15) можно записать в виде

$$L - XA = \varepsilon. \quad (3.19)$$

Величину $\varepsilon_\Sigma^2 = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i^2$ в матричном виде можно представить как скалярное произведение вектора ε на себя. При этом целевая функция

$$\Phi = (L - XA)^T (L - XA). \quad (3.20)$$

Градиент функции Φ векторного аргумента A определяется дифференцированием уравнения (3.20):

$$\nabla \Phi = 2X^T(L - X\hat{A}) = \Theta. \quad (3.21)$$

Отсюда получаем расчетное соотношение метода наименьших квадратов:

$$C\hat{A} = X^T L \rightarrow \hat{A} = C^{-1} X^T L, \quad (3.22)$$

где $C = X^T X$ – так называемая информационная матрица.

Система (3.22) называется системой нормальных уравнений.

3.3.2. Интервальные оценки параметров

Полученные точечные оценки параметров \hat{A} представляют собой случайные величины, математические ожидания которых равны точным значениям наблюдаемых параметров. В случае когда погрешности измерений ε распределены по нормальному закону, каждая точечная оценка может быть дополнена интервальной, позволяющей установить доверительные интервалы изменения параметров. Мы не имеем возможности привести доказательства основных соотношений, определяющих конечные выражения, поэтому ограничимся только перечислением результатов. Подробное изложение вопроса приведено в источнике [14, с. 146–160].

Несмещенные оценки \hat{A} представляют собой n -мерный случайный нормальный вектор с корреляционной матрицей (σ^2 – константа):

$$B = \text{cov}(\hat{A}) = \sigma^2 C^{-1}. \quad (3.23)$$

Это видно из следующей последовательности преобразований. Принимая во внимание, что дисперсия константы – нуль, согласно (3.19) имеем:

$$\text{cov}(\varepsilon) = \sigma^2 E = X \text{cov}(A) X^T,$$

где E – единичная матрица.

Умножая данное выражение слева на X^T и справа на X , получаем

$$\sigma^2 X^T E X = \sigma^2 X^T X = X^T X \operatorname{cov}(\hat{A}) X^T X.$$

При $C = X^T X$ данное выражение преобразуется к виду $\sigma^2 E = C \operatorname{cov}(\hat{A})$, откуда следует (3.23).

$$\operatorname{cov}(\hat{A}) = \sigma^2 C^{-1}.$$

Полученные числовые значения оцениваемых параметров \hat{A} позволяют определить расчетные погрешности оценок:

$$\hat{\varepsilon} = L - X\hat{A}. \quad (3.24)$$

При формулировке задачи оценивания параметров указывалось, что исходные измерения обладают одинаковой, хотя и неизвестной точностью или дисперсией σ^2 . Из (3.24) следует, что $\hat{\varepsilon}$ является N -мерным, нормально распределенным вектором отклонений случайных величин от своих математических ожиданий. При этом сумма

$$S = \sum_{i=1}^N \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\sigma^2} \quad (3.25)$$

распределена как χ^2 с $N - n$ степенями свободы и независима от \hat{A} .

Рассматривая компоненты вектора $\hat{\varepsilon}$ как N случайных реализаций одной и той же групповой (n групп, по числу оцениваемых состояний) случайной величины – ошибки измерений, – нетрудно получить ее выборочную дисперсию:

$$s^2 = \frac{1}{N - n} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2,$$

математическое ожидание которой равно σ^2 .

Отсюда статистической оценкой $\hat{\sigma}^2$ является выражение

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N - n} \sum_{i=1}^N \hat{\varepsilon}_i^2. \quad (3.26)$$

Сформулированные результаты позволяют выполнить оценку доверительных интервалов для оцениваемых параметров $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ в полном соответствии с общей теорией (см. п. 1.5).

Принимая допущение, что вектор оценок распределен нормально с корреляционной матрицей $B = \sigma^2 C^{-1}$, а сами оценки относительно независимы, получаем параметры вероятностных распределений оценок:

$$\begin{aligned} M(\hat{a}_i) &= a_i; \\ D(\hat{a}_i) &= B_{ii} = \sigma^2 C_{ii}^{-1}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

где C_{ii}^{-1} – диагональный элемент i матрицы C^{-1} .

Учитывая соотношения (3.25), (3.27), в соответствии с (2.2) находим, что величина

$$t_{N-n} = \frac{\hat{a}_i - a}{\sqrt{\sigma^2 C_{ii}^{-1}} \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\sigma^2}}} \sqrt{N-n} = \frac{\hat{a}_i - a}{\hat{\sigma} \sqrt{C_{ii}^{-1}}} \quad (3.28)$$

имеет распределение Стьюдента с $N - n$ степенями свободы. Здесь $\hat{\sigma}$, определяемая выражением (3.26), может рассматриваться как средне-квадратичная погрешность измерений.

Задаваясь доверительным уровнем β , получаем соотношение для доверительного интервала параметров \hat{A} , $I_{\hat{a}_i} = \hat{a}_i \mp \psi_a$, где

$$\psi_a = \gamma_\beta \hat{\sigma} \sqrt{C_{ii}^{-1}}. \quad (3.29)$$

Аналогично может быть построен доверительный интервал и для исходных наблюдений $I_{l_i} = l_i \mp \psi_\ell$, где

$$\psi_\ell = \gamma_\beta \hat{\sigma} \sqrt{X C_{ii}^{-1} X^T}. \quad (3.30)$$

Для иллюстрации применения описанных формул оценки параметров приведем **численное решение задачи 3.1**. Для этого подставим числовые значения в уравнения (3.12) и получим числовое выражение системы уравнений $LI = XU + \varepsilon$:

$$\begin{pmatrix} -0,2 \\ 0,35 \\ -0,24 \\ 0 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,8 & 1 \\ 1 & -2,2 \\ -1 & 1 \\ -0,8 & 0 \\ 0 & -1,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

где LI , U соответственно векторы наблюдаемых значений токов (измерения) и искомых параметров напряжений узлов, X – матрица коэффициентов связи между наблюдаемыми значениями токов и искомыми оценками напряжений.

Для определения точечных оценок параметров U_1 , U_2 составим систему уравнений

$$X^T X \hat{U} = X^T LI. \quad (3.32)$$

Подставляя в эту формулу цифровые значения, получаем

$$C = X^T X = \begin{bmatrix} 5,88 & -5 \\ -5 & 8,28 \end{bmatrix}; \quad X^T LI = \begin{bmatrix} 0,95 \\ -1,45 \end{bmatrix}.$$

Отсюда обратная матрица C^{-1} и решение \hat{U} системы уравнений (3.32) имеют вид:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} 0,35 & 0,211 \\ 0,211 & 0,248 \end{bmatrix}; C_{ii}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,248 \end{bmatrix}; \hat{U} = C^{-1}LI = \begin{bmatrix} 0,026 \\ -0,1594 \end{bmatrix}.$$

Полученные величины представляют собой оптимальные оценки параметров. Подстановка найденных оценок в систему уравнений $\hat{I} = X\hat{U}$ позволяет найти оценки измерений, наименее противоречащих всей совокупности наблюдений, и «кажущиеся погрешности» $\varepsilon = LI - \hat{I}$.

$$\hat{I} = [-0,206; \quad 0,377; \quad 0,185; \quad -0,021; \quad 0,191]^T;$$

$$\varepsilon = [0,006; \quad -0,027; \quad -0,055; \quad 0,021; \quad 0,009]^T.$$

Среднеквадратичная погрешность измеренных величин

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{N-n} \sum \varepsilon_i^2} = 0,0376.$$

Задаваясь доверительным уровнем $\beta = 0,9$ ($\alpha = 1 - \beta = 0,1$) для распределения Стьюдента с $N - n = 5 - 2 = 3$ степенями свободы ($N = 5$ уравнений и $n = 2$ оцениваемых напряжения), находим $\gamma_\beta = \lambda_3(0,1) = 2,353$. Подставляя полученные величины в (3.29), находим доверительные интервалы для напряжений:

$$\begin{aligned} \psi_u &= \gamma_\beta \hat{\sigma} \sqrt{C_{ii}^{-1}} = 2,353 \cdot 0,0376 \cdot \sqrt{\begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,248 \end{bmatrix}} = 0,088 \cdot \begin{bmatrix} 0,592 \\ 0,498 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0,0523 \\ 0,044 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда левый предел доверительного интервала для напряжений имеет вид:

$$\hat{U} \geq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,026 \\ -0,1594 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0,0523 \\ 0,044 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,973 \\ 0,797 \end{bmatrix};$$

и правый предел доверительного интервала:

$$\hat{U} \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,026 \\ -0,1594 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,0523 \\ 0,044 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,078 \\ 0,885 \end{bmatrix}.$$

3.3.3. Учет дополнительных факторов

В предыдущих параграфах этой главы описан простейший вариант метода наименьших квадратов с косвенными измерениями. Рассмотрим, как изменяются изложенные выше результаты при отказе от основных допущений метода.

Учет различной точности наблюдений. Во многих случаях статистической оценки параметров характер наблюдений с самого начала свидетельствует о различной точности некоторых из них. В

качестве примера рассмотрим оценки параметров установившегося режима. Параметры режима электрической системы в реальных случаях оцениваются на основе замеров мощности линий передачи и нагрузок узлов. Однако эти замеры выполняются по-разному. Нагрузки узлов и перетоки большинства местных линий замеряются в энергосистеме два раза в год в дни системного замера, который содержит примерно четыре точки (ночной провал, утренний и вечерний максимумы и промежуточный замер). Перетоки же системообразующих линий, мощности станций, суммарная нагрузка объединенной системы в целом и ее отдельных частей контролируются непрерывно с помощью систем телемеханики с циклом опроса в 5–10 секунд. Следовательно, если необходима оценка режима, относящаяся ко дню сезона, не совпадающему с временем замера, то нагрузки узлов и перетоки большинства линий приходится прогнозировать. Очевидно, точность такого прогноза (псевдозамера) существенно ниже, чем точность замера графиков постоянно контролируемых узлов. Таким образом, рассматривая серию замеров, естественно предположить, что случайная ошибка ε в замерах разных типов имеет различную точность:

$$\sigma^2(\varepsilon_i) = \sigma^2/p_i^2.$$

Величины p_i в данной формуле называются весами. Более точным замерам должны соответствовать и большие веса. Случайные измерения с различными весами легко сводятся к рассмотренному нами простейшему случаю (равноточных измерений) переходом к «взвешенным измерениям», т. е. вместо исходной системы

$$L = XA + \varepsilon$$

достаточно перейти к системе наблюдений

$$L^* = X^*A + \varepsilon^*, \quad (3.33)$$

где измененные параметры (со звездочками) определяются поэлементным (адемаровым) произведением исходных величин на вектор весовых коэффициентов p . Скорректированные уравнения (3.33) уже имеют одинаковые дисперсии «взвешенных оценок» и полностью соответствуют описанной в п. п. 3.3.2 постановке задачи оценивания параметров.

Как известно, линейная зависимость между параметрами в физических системах приближенно описывает характер рассматриваемых явлений, более точно они описываются системами нелинейных уравнений: вспомним, например, систему уравнений установившегося режима в форме баланса мощностей. Если измерению подлежат

потоки мощности узлов и линий, то узловые уравнения являются нелинейными. Чтобы сделать наши дальнейшие рассуждения более конкретными, рассмотрим сеть переменного тока той же топологии, что и в приведенном ранее примере (пример 3.1, рис. 3.1). Исходные данные и результаты замеров указаны на рис. 3.2. Как следует из рисунка, рассматривается простейший случай такой сети, проводимости ее линий чисто реактивные, а в узлах заранее известны модули напряжений. Для оценки фазовых углов (δ_i) напряжений и уточнения замеренных мощностей достаточно записать систему нелинейных уравнений относительно замеров

$$LP = \varphi(\delta) + \varepsilon, \quad (3.34)$$

принимая во внимание, что мощность по связи $i - j$

$$P_{ij} = B_{ij}V_iV_j \sin(\delta_i - \delta_j).$$

Система уравнений относительно замеров:

$$\begin{aligned} LP_1 &= B_{12}V_1V_2 \sin(\delta_1 - \delta_2) + B_{13}V_1V_3 \sin \delta_1 + \varepsilon_1; \\ -LP_2 &= B_{12}V_1V_2 \sin(\delta_2 - \delta_1) + B_{23}V_2V_3 \sin \delta_2 + \varepsilon_2; \\ LP_{12} &= B_{12}V_1V_2 \sin(\delta_1 - \delta_2) + \varepsilon_3; \\ LP_{31} &= -B_{13}V_1V_3 \sin \delta_1 + \varepsilon_4; \\ LP_{32} &= -B_{32}V_3V_2 \sin \delta_2 + \varepsilon_5, \end{aligned} \quad (3.35)$$

где $V_i = |U_i|$; за положительное направление мощности узла принята генерация.

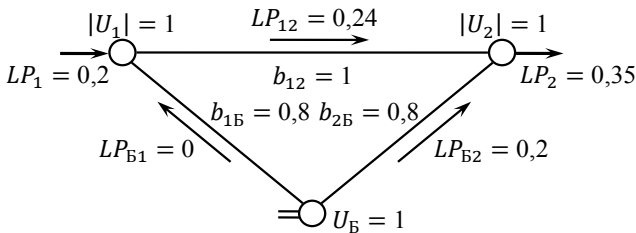


Рис. 3.2. Результаты замеров в сети переменного тока

Данная задача относится к классу нелинейного регрессионного анализа и может быть решена на основе статистической линейаризации [17] итерационными методами, например методом простой итерации, рекуррентное соотношение которого, согласно (3.22) может быть представлено в виде:

$$\hat{\delta}^{(k+1)} = (C^{(k)})^{-1} (X^{(k)})^T L + \varepsilon^{(k)}. \quad (3.36)$$

В свою очередь матрица коэффициентов $X^{(k)}$ определяется линеаризацией $\varphi(\delta)$ в точке, соответствующей $\hat{\delta}^{(k)}$.

Зададимся некоторым начальным приближением к решению задачи $\hat{\delta}^{(0)}$ и линеаризуем систему уравнений (3.37) в окрестности начальных мощностей и напряжений:

$$\begin{aligned} LP_1 &= LP_1^{(0)} + B_{12}V_1V_2 \cos(\hat{\delta}_1^{(0)} - \hat{\delta}_2^{(0)}) (\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) + \\ &\quad + B_{13}V_1V_3 \cos \hat{\delta}_1^{(0)} \Delta\delta_1 + \varepsilon_1; \\ -LP_2 &= -LP_2^{(0)} + B_{12}V_1V_2 \cos(\hat{\delta}_1^{(0)} - \hat{\delta}_2^{(0)}) (\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) + \\ &\quad + B_{23}V_2V_3 \cos \hat{\delta}_2^{(0)} \Delta\delta_2 + \varepsilon_2; \\ LP_{12} &= LP_{12}^{(0)} + B_{12}V_1V_2 \cos(\hat{\delta}_1^{(0)} - \hat{\delta}_2^{(0)}) (\Delta\delta_1 - \Delta\delta_2) + \varepsilon_3; \\ LP_{31} &= LP_{31}^{(0)} - B_{13}V_1V_3 \cos \hat{\delta}_1^{(0)} \Delta\delta_1 + \varepsilon_4; \\ LP_{32} &= LP_{32}^{(0)} - B_{32}V_3V_2 \cos \hat{\delta}_2^{(0)} \Delta\delta_2 + \varepsilon_5, \end{aligned}$$

где $LP_i^{(0)}$, $LP_{ij}^{(0)}$ представляют собой некоторые постоянные составляющие.

Линеаризованные уравнения переходят в линейную задачу регрессионного анализа. Суммарная невязка линеаризованной задачи определяется не только погрешностями измерений, но и погрешностью линеаризации системы нелинейных уравнений. Эта погрешность будет уменьшаться с уменьшением разницы между смежными текущими значениями параметров. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока два последовательных расчета не дадут практически одинаковый результат. Такой способ решения нелинейной задачи регрессионного анализа называют методом Гаусса. Другие методы описаны в источнике [17]. Особого внимания заслуживают книги [21], [22], посвященные постановке и способам решения задачи идентификации установившегося режима и оценке параметров ЭЭС. Для закрепления знаний полезно самостоятельно получить численные решения поставленных, но не решенных в данной главе задач.

4. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Метод факторного анализа применяется для статистического исследования системы случайных величин, связанных некоторыми устойчивыми случайными или неслучайными тенденциями. В главе 3 частично рассматривались задачи подобного типа (задача многомер-

ной регрессии), однако построение модели, объясняющей поведение каждой случайной величины в факторном и регрессионном анализе, выполняется по-разному. В регрессионном анализе сами факторы и структура модели вводятся априори, при решении той же задачи методами факторного анализа предположения о факторах, определяющих поведение системы случайных величин, являются менее конкретными, постулируется их существование, а количество факторов и структура модели определяются в ходе решения. В математической статистике под факторным анализом обычно понимают два метода – собственно факторный и компонентный. Эти методы близки по назначению. Компонентный метод базируется на простых и наглядных понятиях, вытекающих из *анализа матрицы корреляционных моментов и соответствующих этой матрице линейных преобразований*. Характеризуя особенности собственно факторного анализа, ограничимся формулировкой основных результатов, поскольку связанные с ними математические выкладки громоздки и лишены наглядности.

4.1. Метод компонентного анализа

Рассмотрим многомерную случайную величину $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$, заданную своими выборками объема N . Для анализа случайных величин, зависящих от $\{X_i\}$, необходимо определить статистические характеристики компонент, к числу которых относятся выборочные средние $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_p\}$ и дисперсии, которые в большей степени характеризуют отклонения исходных случайных величин от своих средних. Максимальные колебания случайных величин определяют факторы, обладающие максимальной дисперсией. Может оказаться, что максимальной дисперсией обладает некоторая линейная комбинация исходных случайных величин (естественно, сравнивать следует нормированные линейные комбинации случайных величин, поскольку, умножая любую случайную величину на достаточно большое число, можно получить сколь угодно большую дисперсию).

Метод главных компонент (МГК) по сути состоит в выборе нового ортогонального базиса, где базисные векторы направлены так, чтобы дисперсия проекций рассматриваемой совокупности точек на каждый базисный вектор была максимальной.

Пример. Рассмотрим D наблюдений сигналов $\{\bar{X}_j, j = 1, \dots, D\}$, каждый из которых – вектор из N компонент и является суммой d

($d < D$) «источников» $\{Z_{ij}, i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, d\}$. При этом $\bar{X}_j = \sum_{k=1}^d u_{jk} \bar{Z}_k$. Например, это могут быть звуковые сигналы, снимаемые с помощью D микрофонов, при том что источников звука d (два человека) меньше, чем микрофонов. С помощью МГК можно по наблюдаемым сигналам определить количество источников, а также выделить сигналы самих источников. Примеры использования МГК в электроэнергетике будут рассмотрены далее.

Пусть кроме сигналов от источников микрофоны записывают еще и шумы. Метод главных компонент позволяет оптимальным образом отфильтровать шум.

Задача анализа главных компонент имеет как минимум три базовых постановки:

- аппроксимировать данные линейными многообразиями меньшей размерности;
- найти ортогональные подпространства меньшей размерности, координаты которых характеризуются максимальным разбросом данных;
- для данной многомерной случайной величины построить такое ортогональное преобразование координат, в результате которого корреляции между отдельными координатами обратятся в нуль.

Первые три версии оперируют конечными множествами данных. Они эквивалентны и не используют никакой гипотезы о статистическом порождении данных. Четвертая постановка оперирует случайными величинами. Конечные множества появляются здесь как выборки из данного распределения.

4.1.1. Линейная комбинации случайных величин с максимальной дисперсией

В параграфе 3.1 отмечалось, что при оценке погрешностей параметров распределений методом максимального правдоподобия большое значение имеет величина $I(a)$, называемая информацией о параметре (3.7). При этом величина, обратная $I(a)$, определяет дисперсию оценки параметра a , то есть информативность случайной величины зависит от ее дисперсии.

Иллюстрацией этому является линия регрессии $y(x)$, которая характеризуется максимальной дисперсией проецируемых на нее наблюдений случайной величины (x, y) . Это позволяет сделать заключение, что наиболее значимыми в технических приложениях, как

правило, являются направления с максимальной дисперсией наблюдаемой случайной величины.

Рассмотрим всевозможные линейные комбинации случайных величин $\{X_i\}$

$$Y = U^T X = \sum_{j=1}^p u_j X_j \quad (4.1)$$

с учетом ограничения, выполняющего роль условия нормирования:

$$\|U\| = \sum_{j=1}^p u_j^2 = 1. \quad (4.2)$$

Требуется найти вектор U , обеспечивающий максимальную дисперсию:

$$\max \left\{ \Phi = \sigma^2 Y = U^T K_X U = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p K_{ij} U_i U_j \right\}, \quad (4.3)$$

где $K_X = \text{cov}(X)$ – матрица выборочных корреляционных моментов исходных случайных величин X_1, X_2, \dots, X_p . Предполагается, что элементы данной матрицы $K_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$ представляют собой оценки, рассчитанные по выборкам $\{x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{Ni}\}$ и $\{x_{1j}, x_{2j}, \dots, x_{Nj}\}$. Таким образом, задача выделения случайного фактора, обладающего максимальной дисперсией, сводится к нахождению максимума функции (4.3) при условии выполнения ограничения (4.2). Оптимизационная задача решается методом Лагранжа. Для этого вводится вспомогательная целевая функция

$$L = \sigma^2 Y + \lambda \left(1 - \sum_{j=1}^p u_j^2 \right), \quad (4.4)$$

где λ – неопределенный множитель Лагранжа.

Абсолютный максимум функции (4.4) соответствует условному максимуму функции (4.3) при выполнении ограничения (4.2). Дифференцируя функцию по всем входящим в нее переменным, получаем следующие условия максимума:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial u_i} &= 2 \sum_{j=1}^p K_{ij} u_j - 2\lambda u_i = 0, \quad i = 1, \dots, p; \\ \sum_{j=1}^p u_j^2 &= 1. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Первое соотношение в системе (4.5) можно записать в виде $KU = \lambda U$, то есть решениями системы (4.5) являются все **нормированные собственные векторы** ($K_X h = \lambda h$) матрицы K_X . Каждое ре-

шение определяет точку экстремума или особую точку функции. Глобальному экстремуму соответствуют координаты собственного вектора h_1 , соответствующего максимальному собственному числу λ_1 . Здесь индекс 1 идентифицирует первый значащий фактор – линейную комбинацию с максимальной дисперсией.

Собственные числа и векторы матрицы корреляционных моментов обладают некоторыми полезными свойствами, которые используются в компонентном анализе.

Все собственные числа симметричной матрицы K_X вещественны, а собственные векторы могут быть выбраны перпендикулярными друг другу. Собственные векторы определяют подвергающиеся чистому растяжению или сжатию направления линейного преобразования, соответствующего матрице K_X .

Между исходной матрицей K_X и диагональной матрицей

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

имеется упомянутое в главе 1 соотношение преобразования подобия [15],

$$\lambda = H^T K_X H, \quad (4.7)$$

где H – ортонормированная матрица преобразования, столбцы которой состоят из собственных векторов h_1, h_2, \dots, h_p . При этом норма вектора

$$\|h_j\| = \sum_{i=1}^p h_{ij}^2 = 1; \forall j,$$

а скалярное произведение двух неодинаковых векторов равно нулю,

$$\langle h_j, h_r \rangle = \sum_{i=1}^p h_{ij} h_{ir} = 0, r \neq j. \quad (4.8)$$

Обратное соотношение между исходной матрицей и матрицей λ

$$K_X = H \lambda H^T. \quad (4.9)$$

Последнее выражение представимо в виде суммы:

$$K_X = \sum_{i=1}^p \lambda_i h_i h_i^T. \quad (4.10)$$

Существующие алгоритмы определения собственных чисел и векторов основаны на однотипном расчете вектора h_1 с максимальным собственным числом. Остальные векторы вычисляются по аналогии для новой матрицы, представляющей собой разность

$$K_X^1 = K_X - \lambda_1 h_1 h_1^T. \quad (4.11)$$

Действительно, согласно (4.10) новая матрица имеет разложение

$$K_X^1 = \lambda_2 h_2 h_2^T + \dots + \lambda_p h_p h_p^T, \quad (4.12)$$

из чего следует, что (λ_2, h_2) будут максимальным собственным числом и соответствующим собственным вектором для матрицы K_X^1 .

Поскольку h_1 является решением оптимизационной задачи (4.4), (4.5), то вектор $Y_1 = h_1^T X = \sum_{j=1}^p h_{j1} X_j$ является тем самым искомым вектором, в направлении которого дисперсия многомерной случайной величины максимальна.

Случайные величины

$$X' = X - \langle XY_1 \rangle Y_1; X'_i = X_i - h_{i1} Y_1, i = 1, \dots, p, \quad (4.13)$$

представляют собой проекции исходных случайных величин на подпространство, перпендикулярное случайной величине Y_1 . Легко убедиться в том, что матрица корреляционных моментов остаточных случайных величин X'_1, X'_2, \dots, X'_p равна матрице K_X^1 , которую в дальнейшем будем называть остаточной матрицей после выделения первой главной компоненты.

Сделаем некоторые выводы, чтобы понять реальный смысл выделенной нами случайной величины Y_1 . Эта величина представляет собой случайный фактор, которому соответствует максимально возможная дисперсия $\sigma^2 Y_1 = \lambda_1$. После того как из системы случайных величин выделена составляющая, связанная с Y_1 , максимальная дисперсия нормированной случайной величины X_i , определенная на множестве остаточных случайных величин X'_i , не может превысить величины λ_2 . Совершенно очевидно, что процесс выделения факторов, обладающих максимальной дисперсией, может быть продолжен на остаточном вероятностном пространстве $\{X'_i\}$, в результате чего выделяются факторы Y_2, Y_3, \dots, Y_p . При этом остаточная дисперсия может быть сведена до какой угодно малой величины.

Таким образом, моделирование случайных величин на основе метода компонентного анализа включает три этапа:

- находятся выборки исследуемых случайных величин (матрица X);
- вычисляются элементы матрицы выборочных корреляционных коэффициентов:

$$K_{j,k} = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{ij} - \bar{x}_j)(x_{ik} - \bar{x}_k); \quad (4.14)$$

- вычисляются r максимальных по модулю собственных чисел $\{\lambda_i\}$ и соответствующих им ортонормированных собственных векторов $\{h_i, i = 1, \dots, r\}$ матрицы выборочных корреляционных моментов, на основе которых строятся независимые случайные величины

$$Y_i = \sum_{k=1}^n h_{ki} X_k, \quad (4.15)$$

применяемые для моделирования исходных случайных величин, и матрицы корреляционных моментов.

Связь между исходными случайными величинами и моделирующими главными компонентами или факторами представляется в виде

$$X_j = \sum_{i=1}^r h_{ij} Y_i + \varepsilon_j, \quad (4.16)$$

$$K_X = \sum_{i=1}^r \lambda_i (h_i h_i^T) + S(\varepsilon_j), \quad (4.17)$$

где h_{ij} – компонента вектор-столбца h_i ; $(h_i h_i^T)$ – матрица размером $n \times n$, полученная умножением вектор-столбца h_i на транспонированный вектор-строку h_i^T ; $S(\varepsilon_j)$ – матрица размером $n \times n$, содержащая остаточные значения матрицы выборочных корреляционных моментов.

4.1.2. Необходимое число выделяемых главных компонент

Описанный в предыдущем пункте метод может применяться для моделирования как случайных величин, так и детерминированных зависимостей, напоминая в этом отношении рассмотренный в главе 3 регрессионный метод аппроксимации временных зависимостей. Учет статистического характера задачи заставляет нас постоянно помнить, что мы имеем дело не с генеральной совокупностью значений, а с выборкой, т. е. некоторые свойства моделируемой совокупности присущи только данной выборке и было бы совершенно неправильно переносить все свойства выборки на генеральную совокупность, оцениваемую по ней. Поэтому в компонентном анализе желательно выделять только те факторы, которые характеризуют генеральную совокупность. «Слишком хорошее приближение следует в большинстве случаев считать более серьезной ошибкой, чем недостаточное приближение» [23].

Наиболее простым способом выбора разумного количества факторов, определяющих поведение анализируемой совокупности случайных величин, является оценка общего вклада в дисперсию последовательности главных компонент Y_1, Y_2, \dots, Y_R . Остановиться следует на таком значении r , при котором вклад в дисперсию достаточно велик, например больше, чем 75 или 90 %. Общий процент вклада β в дисперсию при фиксированном r вычисляется по формуле [23]

$$\beta = 100 \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_i}{trS}, \quad (4.18)$$

где trS – след (сумма элементов главной диагонали) матрицы выборочных корреляционных моментов.

Коррекция факторов. Рассмотренный простейший критерий оценки количества учитываемых факторов необходимо дополнить статистическими расчетами, использующими различные выборки из одной и той же генеральной совокупности. Наиболее убедительный результат получается в случае, когда компонентный анализ выполняется для нескольких независимых выборок, давая в результате обработки каждой выборки свои собственные векторы H^k . Сравнивая между собой эти различные векторы, находим усредненные значения \tilde{h}_i , характерные для всех выборок. Эти векторы могут быть определены после решения, например, следующей статистической задачи:

$$h_i^k = \tilde{h}_i + \varepsilon_i^k, \quad (4.19)$$

где \tilde{h}_i – усредненное значение собственного вектора; ε_i^k – погрешность моделирования при испытании k .

Если на этапе статистического анализа каждой выборки выделены общие факторы, присущие всем выборкам случайных величин, то каждый усредненный по множеству выборок $k = 1, \dots, K$ вектор \tilde{h}_i примерно равен собственному вектору h_i^k . Если это так, то математические ожидания случайных величин

$$\tilde{h}_i^T K_X^k \tilde{h}_i \frac{1}{\lambda_i^k} - 1;$$

$$\tilde{h}_i^T (K_X^k)^{-1} \tilde{h}_i \lambda_i^k - 1$$

должны быть равными нулю, а составленная из этих оценок случайная величина

$$\beta = (N - 1) \left(\lambda_i^k \tilde{h}_i^T (K_X^k)^{-1} \tilde{h}_i + \frac{1}{\lambda_i^k} \tilde{h}_i^T K_X^k \tilde{h}_i - 2 \right) \quad (4.20)$$

принадлежит классу распределений χ^2 с числом степеней свободы $p - 1$, где N – число наблюдений, на основании которых определены выборочные корреляционные моменты, составляющие матрицу K_X^k , а p – ранг этой матрицы [23]. Напомним, что в выражении (4.20) K_X^k – это матрица выборочных корреляционных моментов, найденная по выборке k , $\{\lambda_i^k\}$ – совокупность собственных значений этой матрицы.

Факторный метод моделирования совокупности случайных величин можно применять в случае, когда априори известно, что совокупность $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ подчинена влиянию некоторых общих факторов, в основном объясняющих поведение каждой величины X_i . Рассмотрим применение методики моделирования к решению конкретных электроэнергетических задач.

4.2. Решение задач анализа режима электрических систем методом главных компонент

4.2.1. Моделирование графиков нагрузок методом главных компонент

Рассмотрим множество нагрузок $\mathbb{P} = \{P_{ti}\}$ узлов электрической системы $i = 1, \dots, n$, определенных графиками контрольных замеров или данными систем телемеханики в моменты времени $t = 1, \dots, N$, на основании которых рассчитаны выборочные математические ожидания \bar{P}_i , $i = 1, \dots, n$ и матрицы корреляционных моментов $K_P = \{\text{cov}(P_i, P_j)\}$ (взаимозависимость между графиками нагрузок (ГН) узлов i, j).

Вычисляя первые $r \leq n$ собственных чисел $\{\lambda_s\}$ и векторов $\{h_s\}$ матрицы корреляционных моментов K_P и пользуясь формулами (4.15), находим обобщенные ГН: $\Gamma = \mathbb{P}H$, определяющие общие факторы, от которых зависит изменение всех графиков. Здесь

$$\Gamma_{ts} = \sum_{j=1}^n P_{tj} h_{js}. \quad (4.21)$$

$$\dim H = n, r; \dim \mathbb{P} = N, n; \dim \Gamma = N, r.$$

При этом формула (4.16) позволяет выразить исходные графики нагрузок через обобщенные типовые графики:

$$P_{ti} = \sum_{s=1}^r \Gamma_{ts} h_{si} + \varepsilon_i. \quad (4.22)$$

Моделирование нагрузок на основе компонентного анализа в настоящее время получило широкое применение. Задача моделирования графиков делится на два этапа.

На первом из них создаются обобщенные типовые графики, для получения которых используется достаточно представительная выборка «исходных графиков». Выполненные для ряда энергосистем расчеты показывают, что обобщенные типовые графики узлов энергосистем отличаются высокой статистической устойчивостью (при увеличении величины выборки среднее значение физической величины стремится к некоторому конечному пределу – своему МО). На рис. 4.1 показаны диапазоны изменения обобщенных типовых графиков, соответствующих первой и второй главным компонентам матрицы корреляционных моментов, для различных временных отрезков одной и той же обучающей выборки. Рисунки свидетельствуют об устойчивости факторов, определяющих конфигурацию графиков, которые, следовательно, могут послужить надежной основой для моделирования любых совокупностей исходных графиков электрических систем.

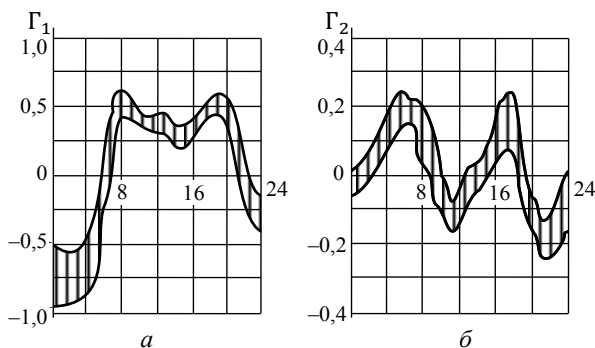


Рис. 4.1. Диапазоны колебания первого (а) и второго (б) обобщенных типовых графиков нагрузки электрических систем

На втором этапе моделирования графиков нагрузок узлов электрических систем учитываются все узлы, входящие в рассматриваемую часть системы. Исходными данными при этом также являются контрольные замеры, однако их количество для каждой нагрузки обычно бывает значительно меньшим, чем объем информации элементов контрольной выборки. Как правило, на втором этапе моделирования графиков делается четыре-шесть замеров. Поскольку обобщенные типовые графики к моменту выполнения второго этапа уже

найденны, решается задача регрессионного анализа, назначение которого заключается в представлении каждой нагрузки электрической системы в виде линейной комбинации обобщенных типовых графиков и математического ожидания MP_i . Моделирование математических ожиданий выполняется на основе данных о пропусках энергии соответствующими узлами энергосистем за рассматриваемый отрезок времени, а для моделирования отклонений от математических ожиданий используется регрессионная модель, аналогичная рассмотренной в примере 3.3:

$$P_{ti} = MP_i + \sum_{s=1}^r \Gamma_{ts} a_{si} + \varepsilon_{ti}, \quad (4.23)$$

где P_{ti} – наблюдаемое значение мощности узла i для замера t ; a_{si} – получаемая методом наименьших квадратов оценка веса обобщенного типового графика Γ_s в исходном графике P_i .

Формулы определения оптимальных значений весов a_{is} соответствуют выражению (4.24):

$$CA_i = \Gamma^T P_i, \quad (4.24)$$

где

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \dots & \Gamma_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{T1} & \dots & \Gamma_{Ts} \end{bmatrix}$$

– матрица, столбец i которой содержит значения обобщенного графика Γ_i в точках t ($t = 1, \dots, T$); $C = \Gamma^T \Gamma$; A_j – вектор, содержащий оптимальные оценки компонент разложения графика P_i по обобщенным типовым графикам, надстрочный индекс « T » соответствует транспонированию матрицы.

После выполнения второго этапа моделирования нагрузка каждого узла представляется следующим образом:

$$P_i = MP_i + \sum_{s=1}^r a_{is} \Gamma_s. \quad (4.25)$$

Многочисленные расчеты для различных энергосистем показали, что в формуле (4.25) достаточно учесть не более трех обобщенных типовых графиков. Таким образом, каждый график системы определяется не более чем четырьмя параметрами: математическим ожиданием MP_j и тремя коэффициентами разложения a_{1i} , a_{2i} , a_{3i} графика по обобщенным типовым графикам Γ_1 , Γ_2 , Γ_3 .

4.2.2. Применение факторного моделирования нагрузок для определения потерь электрической энергии

Полученная в пп. 4.2.1 факторная модель нагрузок используется в методах определения потерь энергии. Рассмотрим, как применять этот способ моделирования к простейшему алгоритму определения потерь энергии в сети постоянного тока. Потери мощности в линии $i - j$ определяются формулой:

$$\Delta P_{ij} = \Delta P_{ij}(MP) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \Delta P_{ij}}{\partial^2 U_i} s_{U_i}^2 + \frac{\partial^2 \Delta P_{ij}}{\partial^2 U_j} s_{U_j}^2 - 2 \frac{\partial^2 \Delta P_{ij}}{\partial U_i \partial U_j} K_{ij} \right), \quad (4.26)$$

где $\Delta P(MP)$ – потери мощности режима, соответствующего оценке математических ожиданий нагрузок; $s_{U_i}^2$, $K_{ij} = \text{cov}(U_i U_j)$ – оценки дисперсий и корреляционных моментов напряжений узлов.

Оценки параметров режима математических ожиданий нагрузок выполняются на основании данных об энергопотреблении за рассматриваемый период (решение УУН при МО нагрузок), а для оценки дисперсий и корреляционных моментов напряжений используются линеаризованные (в области МО нагрузок) уравнения отклонений параметров режима электрической системы от своих математических ожиданий:

$$W \Delta U = \Delta P.$$

С учетом фактора времени данное матричное уравнение может быть представлено в виде $W \Delta U_t = \Delta P_t$, $t = 1, \dots, T$, или в матричном виде

$$W \Delta \mathbb{U} = \Delta \mathbb{P}, \quad (4.27)$$

где $\Delta \mathbb{U} = \{\Delta U_{it}\}$, $\Delta \mathbb{P} = \{\Delta P_{it}\}$ – матрицы, столбцы которых соответствуют некоторому моменту времени; $\dim \Delta \mathbb{U} = \dim \Delta \mathbb{P} = n, T$.

На основании выполненного в пп. 4.2.1 факторного моделирования нагрузок вектор ΔP_t может быть представлен в виде линейной комбинации $r \leq n$ обобщенных типовых графиков $\mathcal{G} = \{\Gamma_s, s = 1, \dots, r\}$ ($\dim \Gamma_s = T$ – по числу интервалов времени), $\dim \mathcal{G} = (T, r)$. В этом случае

$$\Delta \mathbb{P} = A \mathcal{G}^T, \quad \dim A = (n, r), \quad (4.28)$$

или

$$\Delta P_{it} = \sum_{s=1}^r A_{is} \Gamma_{st}.$$

Подставляя (4.28) в (4.27), получаем:

$$\Delta \mathbb{U} = W^{-1} A \mathcal{G}^T = \mathcal{R} \mathcal{G}^T, \quad \dim \mathcal{R} = (n, r),$$

то есть матрица $\Delta\psi$ является линейной комбинацией тех же обобщенных типовых графиков, которые были найдены при моделировании нагрузок:

$$\Delta U_{it} = \sum_{s=1}^r \gamma_{is} \Gamma_{st}, \quad (4.29)$$

где γ_{is} – компонента матрицы $\mathcal{R} = W^{-1}A$. С учетом выражения (4.29) и принимая во внимание независимость случайных величин, определяющих обобщенные типовые графики, получаем дисперсионные параметры напряжений:

$$s_{U_i}^2 = \sum_{s=1}^r \gamma_{is}^2 \lambda_s; \quad \text{cov}(U_i U_j) = \sum_{s=1}^r \gamma_{is} \gamma_{js} \lambda_s. \quad (4.30)$$

Подставляя выражение (4.30) в формулу потерь энергии, находим решение поставленной задачи. Таким образом, применение факторного моделирования нагрузок позволяет свести операцию определения дисперсионной составляющей потерь энергии к r решениям системы линеаризованных уравнений с матрицей Якоби, рассчитанной в точке математических ожиданий режима, без громоздких матричных операций, применение которых требует больших объемов оперативной памяти ЭВМ.

4.3. Понятие о методе собственно факторного анализа

Метод главных компонент и собственно метод факторного анализа отличаются исходными предположениями, определяющими характер модели. Как указывалось выше, основная предпосылка метода главных компонент состоит в том, что общие факторы $\{Y_j, j = 1, \dots, r\}$ в основном объясняют поведение исходной системы случайных величин и остаточные случайные величины $\varepsilon_i = X_i - \sum_{j=1}^r a_{ij} Y_j$ могут быть отброшены. Однако существует большое количество важных приложений, математическая модель которых сложнее описанной выше. Изменение каждой из рассматриваемых величин X_i в ней определяется взаимодействием различных факторов – общих и характерных. Общие факторы $\{Y_j\}$ оказывают влияние на совокупность случайных величин, в то время как локальные $\{\Psi_i\}$ не зависят друг от друга и влияют только на колебания своей случайной величины X_i . В некотором роде модель уточняет полученную ранее модель компонентного анализа. Если влияние локальных факторов на случайные

величины оказывается большим, чем влияние общих факторов, то применение более простой модели принципиально неправильно.

Рассмотрим математическую постановку и пути решения задачи факторного анализа, которым соответствует система уравнений:

$$X_i = \sum_{j=1}^r a_{ij} Y_j + \Psi_i, \quad (4.31)$$

где $\{X_i\}$ – исходные случайные величины; $\{Y_j\}$ – статистически независимые случайные величины, определяющие общие факторы; $\{\Psi_i\}$ – независимые друг от друга и от общих факторов случайные величины, определяющие локальные факторы.

В матричном виде выражения (4.31) могут быть записаны следующим образом:

$$X = AY + \psi. \quad (4.32)$$

В факторном анализе обычно предполагается, что случайные величины Y_j нормированы, т. е. $\sigma^2 Y_j = 1$. Это предположение не уменьшает общности решения, поскольку ему соответствует просто умножение случайной величины на постоянный множитель.

Для оптимальной оценки параметров, характеризующих случайные величины X_i на основании конечной выборки значений $X_1 = \{X_1^1, \dots, X_1^N\}, \dots, X_n = \{X_n^1, \dots, X_n^N\}$, используется матрица выборочных корреляционных моментов $\text{cov}(X)$. С учетом выражения (4.31) находим

$$\text{cov}(X) = A^T A + \Psi, \quad (4.33)$$

где A – матрица, каждая строка которой A_i состоит из коэффициентов при общих факторах $\{\Gamma_j\}$, $\dim A = (n, r)$; Ψ – диагональная матрица, элементами которой являются дисперсии локальных факторов $\{V_{ii} = \sigma^2 \Psi_i\}$.

Таким образом, матрица корреляционных моментов рассматриваемых нами величин полностью определяется параметрами $\{a_{ij}\}$ и $\{\sigma^2 \Psi_i\}$. Они оцениваются на основе метода максимального правдоподобия.

Как показано в источнике [20], для распределенных по нормальному закону случайных величин X_1, \dots, X_n с матрицей корреляционных моментов K логарифмическая функция правдоподобия (логарифм совместной плотности распределения выборки) представляется в виде:

$$\ell = -\frac{1}{2} N \ln |K| - \frac{1}{2} N \sum_{i,j=1}^n S_{ij} (K^{-1})_{ij}, \quad (4.34)$$

где $|K|$ – определитель матрицы $K = \text{cov}(X)$; $(K^{-1})_{ij}$ – элемент строки i и столбца j матрицы K^{-1} ; S_{ij} – полученная на основе выборки оценка параметра $\text{cov}(X_i X_j)$. В выражении (4.34) величины $|K|$ и K^{-1} являются функциями искомых параметров $\{a_{ij}\}$, $\{\sigma^2 \Psi_i\}$. Чтобы найти оптимальные оценки параметров в соответствии с общей теорией, необходимо определить максимум функции правдоподобия (4.34).

Как показано в источнике [24], оптимальные оценки удовлетворяют условиям: столбцы A_j матрицы оптимальных оценок параметров a_{ij} представляют собой собственные векторы h_i матрицы

$$Z = \Psi^{-1}(S - \Psi). \quad (4.35)$$

Для оптимальных оценок $\sigma^2 \Psi_j$ и a_{ij} выполняются уравнения:

$$S_{ii} = \sum_{j=1}^r a_{ij}^2 + \sigma^2 \Psi_i. \quad (4.36)$$

Таким образом, хотя методы главных компонент и собственно факторного анализа имеют совершенно различную математическую форму, они близки как по исходному содержанию, так и по реализации. В самом деле, если предположить, что дисперсии локальных факторов представляют собой достаточно близкие величины, влияние которых на систему исходных случайных величин меньше, чем влияние общих факторов, напрашивается следующий итерационный путь решения задачи факторного анализа. На первой итерации в качестве $\sigma^2 \Psi_i$ принимается достаточно малая величина σ^2 . При этом допущении оптимальной оценкой матрицы A является матрица, образованная первыми r собственными векторами (h_i) матрицы выборочных корреляционных моментов, т. е. первая итерация факторного метода совпадает с результатами компонентного анализа. На второй итерации в качестве элементов матрицы Ψ принимаются величины

$$V_{ii} = S_{ii} - \sum_{j=1}^R h_{ij}^2 \lambda_j. \quad (4.37)$$

Для получения новых приближений столбцов матрицы A элементы V_{ii} , найденные по (4.37), подставляются в выражение (4.35), и снова находятся первые r собственных векторов получившейся матрицы и т. д.

Подробное описание определения оптимальных оценок параметров в задаче факторного анализа общего вида, когда нет оснований предполагать, что общие факторы сильнее влияют на исходные случайные величины, дано в источнике [24].

4.4. Определение собственных чисел и векторов для матриц выборочных корреляционных моментов

Как следует из содержания п. 4.1, ядром алгоритмов главных компонент и собственно факторного анализа является операция определения r первых максимальных по модулю собственных чисел и соответствующих им собственных векторов матрицы выборочных корреляционных моментов. Для решения этой задачи разработано большое число различных алгоритмов. Опишем простейший из них – так называемый степенной метод. Этот метод может применяться для определения собственных чисел и векторов положительно определенных матриц, если их собственные числа не являются кратными и ощутимо отличаются друг от друга по модулю. Матрицы выборочных корреляционных моментов всегда положительно определены, кроме того, первые собственные числа таких матриц для рассматриваемых нами задач моделирования графиков нагрузки обычно значительно различаются по модулю, что и определяет применимость метода. Чтобы понять сущность степенного метода определения максимального по модулю собственного числа и соответствующего ему вектора, представим произвольный начальный вектор X_0 разложенным по осям, соответствующим собственным векторам:

$$X_0 = a_1 h_1 + a_2 h_2 + \dots + a_n h_n. \quad (4.38)$$

Если вектор X умножить слева на матрицу A , то координата, направленная по собственному вектору h_i , растянется в λ_i раз, т. е.

$$AX_0 = \lambda_1 a_1 h_1 + \lambda_2 a_2 h_2 + \dots + \lambda_n a_n h_n. \quad (4.39)$$

Рассмотренная операция в наибольшей степени увеличивает составляющую вектора, направленную по оси h_1 , поскольку этому вектору соответствует максимальное собственное число λ_1 , т. е. вектор X_1 расположится ближе к оси h_1 , чем исходный вектор X_0 . Продолжая операцию умножения достаточно большое количество раз, можно получить вектор X^N , практически совпадающий по направлению с первым собственным вектором. После того как найден вектор h_1 , для определения собственного числа достаточно произвести умножение $Ah_1 = \lambda_1 h_1$. Чтобы убедиться в справедливости алгоритма, рассмотрим вектор

$$X_N^0 = \frac{1}{\lambda_1^N} A^N X_0 = \frac{1}{\lambda_1^N} (\lambda_1^N a_1 h_1 + \lambda_2^N a_2 h_2 + \dots + \lambda_n^N a_n h_n). \quad (4.40)$$

Это выражение можно переписать следующим образом:

$$X_N^0 = a_1 h_1 + \Delta.$$

Здесь

$$\Delta = \frac{1}{\lambda_1^N} (a_2 \lambda_2^N h_2 + \dots + a_n \lambda_n^N h_n). \quad (4.41)$$

Если отношение второго по модулю собственного числа к первому меньше некоторого числа $\beta < 1$, то выражение (4.41) допускает оценку

$$|\Delta| \leq \beta^N |X_0|. \quad (4.42)$$

Совершенно очевидно, что при известных a_1 , $|X_0|$, $|H|$ и β можно найти достаточно большое значение N , для которого модуль вектора Δ окажется меньше любого наперед заданного числа ε , что и доказывает наше предположение.

После того как выделены первые собственный вектор и собственное число матрицы A , выполняется редукция матрицы, рассмотренная в (4.1), т. е. определяется матрица $A_1 = A - \lambda_1 h_1 h_1^T$, максимальным собственным числом которой является $\lambda_2(A)$, а соответствующим собственным вектором — $h_2(A)$. Применение этого метода для редуцированной матрицы позволяет определить λ_2 , h_2 . Аналогично могут быть получены λ_3 , h_3 и другие собственные числа и векторы. В рассматриваемом методе следует добиваться максимально возможной точности вычислений, необходимо использовать числа с двойной точностью и задавать весьма малые величины ε .

5. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ

Все методы вероятностного анализа задач электроэнергетики можно разделить на два класса: аналитические и методы статических испытаний (например, метод Монте-Карло) [18]. Аналитические методы дают более широкое представление о зависимости вероятностных характеристик от параметров и условий, но их применение связано с определенными математическими трудностями получения аналитических зависимостей.

Применение методов статических испытаний требует большого объема вычислений для получения достаточно точных решений, а следовательно, и больших временных затрат.

Электроэнергетические системы являются самыми большими кибернетически сложными техническими системами. Их полное ана-

литическое описание практически невозможно. С целью развития аналитических методов и расширения классов задач их применения в электроэнергетике вводятся допущения, ограничения и математические преобразования, позволяющие получить более простые математические модели. К числу последних относятся:

- преобразование структуры ЭЭС (районирование, упрощение структурных и математических моделей устройств и элементов ЭЭС и др.);
- функциональные преобразования законов распределения случайной величины;
- линейное преобразование числовых характеристик;
- регрессионный анализ;
- факторный анализ.

Адекватный выбор закона распределения случайной величины является необходимым условием для описания стохастических переменных, т. к. предполагается, что закон распределения представляет собой исчерпывающую характеристику случайной величины. Любые функциональные преобразования функций распределения должны быть аргументированы и критериально обоснованы.

Для задач оперативного и кратковременного планирования применяют аналитические методы, основанные на моментных характеристиках законов распределения параметров ЭС. Метод моментов достаточно прост и точен. Упрощение получается за счет уменьшения информативности и полноты получаемых вероятностных характеристик.

Широкое распространение в электроэнергетике (особенно в задачах прогнозирования параметров ЭЭС) получили регрессионные методы, основанные на теории планирования эксперимента. Применение этих методов при наличии большого числа неконтролируемых параметров позволяет получить приближенную математическую модель исследуемой целевой функции в виде аналитической зависимости от изменяемых параметров ЭС. Повышение точности приближенной математической модели связано с применением методов статистической линеаризации. Нелинейная характеристика заменяется эквивалентной в вероятностном смысле линеаризованной функциональной зависимости случайных величин [25].

Универсальным методом для анализа как линейных, так и нелинейных систем, а следовательно, и упрощенных математических моделей, является метод статических испытаний. Он позволяет числен-

но определить функции распределения случайных величин установившегося режима ЭЭС. Метод заключается в многократном моделировании на ЭВМ режимов функционирования ЭЭС и статистической обработке получаемых результатов.

Наиболее распространенным подходом к решению оптимизационной задачи в стохастической постановке является приведение ее к решению некоторой эквивалентной детерминированной задачи с применением элементов теории вероятностных функций. В основе подобного подхода лежит возможность оптимизации математического ожидания целевой функции в зависимости от математического ожидания режимных параметров. При этом учет вероятностного характера исходной информации производится на этапе расчета установившегося режима, после чего может выполняться оптимизация режима ЭС с использованием любого из детерминированных методов.

Наибольшее распространение получили приближенные методы вероятностной оптимизации установившихся режимов ЭС, основанные на методах стохастической аппроксимации и статистической линеаризации [25]. Основная идея заключается в возможности получения параметров распределения случайной целевой функции путем линейных преобразований, если известно линейное разложение функции по компонентам.

Решение находится путем последовательной линейной аппроксимации вектор-функции $F(X, Z)$ по зависимым и независимым переменным X, Z . Затем находится ковариационная матрица, которая является базой для дальнейших вероятностных преобразований. Недостатки:

- целевая функция $F(X, Z)$ не всегда гладкая и может не иметь производных на полном множестве точек (X, Z) , что усложняет алгоритм решения задачи по детерминированному эквиваленту, требует на каждом шаге вычисления неявных функций или многомерных интегралов;
- аппроксимация может оказаться недостаточно точной, а итерационные процессы на ее основе окажутся медленно сходящимися в предельных режимах.

К недостаткам всех вероятностных методов можно отнести необходимость нахождения центральных моментов высоких (выше второго) порядков, а также нахождение сложных производных при оперировании с функциями от моментов. Решение проблемы лежит через статистический анализ совокупности данных, фиксируемых в

течение некоторого промежутка времени. Чтобы статистика могла выступать в качестве вероятностной, она должна удовлетворять требованиям: процесс должен быть стационарным в течение периода наблюдения и выборка должна быть достаточно большой.

Глава 5 написана, чтобы продемонстрировать применение в электроэнергетике приведенных в главах 1–4 математических методов и алгоритмов. Реальные задачи обладают большим числом нюансов, учет которых не позволит увидеть специфику математических методов.

5.1. Дефицит мощности в ЭЭС

Данный параграф приводится в качестве примера оперирования с интегральными и дифференциальными функциями распределения случайных величин. Ограниченная пропускная способность межсистемных связей (МСС) объединенной энергосистемы является причиной усечения или редуцирования функций распределения небаланса мощности смежных узлов. Комбинаторный характер случайных состояний МСС и состава генераторов на электростанциях приводит к дискретным вероятностным распределениям, в то время как нагрузка является непрерывной случайной величиной и описывается, как правило, нормальным распределением. Расчет МО дефицита мощности позволяет видеть механизмы использования функций распределения

5.1.1. Небаланс мощности в объединенной ЭЭС

Реально ЭЭС объединяются для совместного выполнения основной функции – надежного и экономичного обеспечения потребителей электроэнергией надлежащего качества. Имеется широкий спектр преимуществ параллельной работы энергосистем. В части надежности это, прежде всего, проявляется в снижении установленной генерирующей мощности за счет взаиморезервирования ЭЭС.

Объединение ЭЭС порождает новые проблемы, одной из которых является ограниченная пропускная способность (ПС) межсистемных связей. Ограничение перетока мощности по электрической связи (линия электропередачи, трансформатор и др.) определяется условиями статической устойчивости, термической стойкости и требованиями правил технической эксплуатации и вызывает необходимость адаптации режимов отдельных ЭЭС для обеспечения системных ограничений.

Пропускная способность МСС имеет вероятностный характер, зависящий не только от вероятностного состояния МСС, но и от режима смежных ЭЭС. Однако при расчетах надежности ЭЭС зависимостью характеристик ПС от состояния ЭЭС, как правило, пренебрегают. ПС отдельной межсистемной связи представляется или детерминированной величиной, или вероятностным рядом.

В *простейшей* постановке зависящий от текущей нагрузки P_n и располагаемой генерации $P_{\text{расп}} = P_{\text{уст}} - P_{\text{откл}}$ небаланс мощности в концентрированной ЭЭС

$$N = P_n - P_{\text{расп}} = P_n - (P_{\text{уст}} - P_{\text{откл}})$$

описывается нормальным распределением и задается математическим ожиданием

$$\bar{N} = \bar{P}_n - P_{\text{уст}} + \bar{P}_{\text{откл}}$$

и дисперсией

$$D(N) = D(P_n) + D(P_{\text{откл}}),$$

где $P_{\text{уст}}$, $P_{\text{откл}}$ – соответственно установленная и отключенная (из-за планового или аварийного восстановления) мощности генерации.

Для построения математической модели взаимопомощи ЭЭС, работающих в составе объединения, рассмотрим схему из двух ЭЭС, связанных линией электропередачи с ограниченной ПС (рис. 5.1).

Собственные небалансы мощности N_A , N_B в ЭЭС A и B при их изолированной работе описываются распределениями $F_A(x)$, $F_B(x)$ с параметрами соответственно (M_A, D_A) , (M_B, D_B) . Рассмотрим случай, когда пропускная способность связи является детерминированной величиной: Π_{AB} – в направлении от A к B , и Π_{BA} – в обратном направлении. Воздействие ЭЭС A на ЭЭС B осуществляется через межсистемную связь $A-B$. Переток мощности π_{BA} по связи в направлении от ЭЭС B к ЭЭС A зависит от небаланса мощности (НМ) в ЭЭС A . При большом дефиците мощности в ЭЭС A ($N_A \geq \Pi_{BA}$) он (по техническим условиям) не превышает Π_{BA} , а при избыточной генерации ($N_A \leq -\Pi_{AB}$, НМ ЭЭС A отрицателен) он по абсолютной величине не превышает Π_{AB} :

$$\pi_{BA} = \begin{cases} \Pi_{BA}, & N_A \geq \Pi_{BA}; \\ N_A, & -\Pi_{AB} \leq N_A \leq \Pi_{BA}; \\ -\Pi_{AB}, & N_A \leq -\Pi_{AB}. \end{cases}$$

Отрицательная величина перетока соответствует его обратному направлению. Функция распределения данного перетока

$$F_{\pi}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq \Pi_{BA}; \\ F_A(x), & -\Pi_{AB} \leq N_A < \Pi_{BA}; \\ 0, & x < -\Pi_{AB} \end{cases}$$

имеет скачки первого рода на границах интервала допустимой ПС $F_A(-\Pi_{AB})$ и $1 - F_A(\Pi_{BA})$. Распределения подобного типа мы будем называть редуцированными. Для произвольного распределения редуцированным интервалом (a, b) функция редуцированного распределения имеет вид, показанный на рис. 5.2.

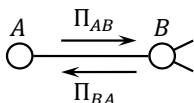


Рис. 5.1. Две ЭЭС с межсистемной связью

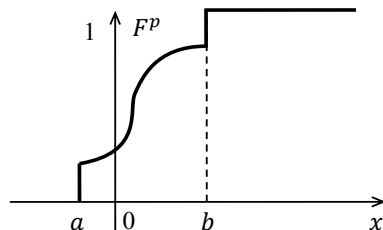


Рис. 5.2. Редуцированная функция распределения

Следует отметить разницу в определении усеченного (в классическом понимании) и редуцированного распределений. В нашем случае на интервале (a, b) плотность редуцированного совпадает с плотностью исходного распределения, в то время как плотность усеченного (в общепринятом употреблении) распределения отличается от исходной на нормирующий множитель.

Интегральная функция усеченного распределения не имеет скачков: начинается с нуля на левой и кончается единицей на правой границе области усечения. В частности, при усечении переменной слева, $x \geq x_0$, плотность и функция усеченного распределения имеют вид:

$$f_y(x) = \frac{1}{1 - F(x_0)} f(x), \quad F_y(x) = \frac{F(x) - F(x_0)}{1 - F(x_0)}, \quad x \geq x_0.$$

Основная задача балансовой надежности ЭЭС сводится к определению затрат на компенсацию ущерба от недоотпуска электроэнергии потребителям, вызванного случайным проявлением локального или глобального дефицита мощности в объединенной ЭЭС. Послед-

ний возникает из-за имеющего случайный характер отказа генерирующего оборудования или превышения нагрузкой прогнозной величины. В свою очередь ущерб определяется математическим ожиданием дефицита мощности, определение которого и составляет ключевую задачу балансовой надежности ЭЭС.

5.1.2. Дискретная случайная генерация и детерминированная нагрузка

Случайное число k работоспособных агрегатов в группе из n энергоблоков описывается биномиальным распределением (пп. 1.2.3):

$$B(k, n, p) = C_n^k p^k q^{n-k}.$$

При заданной детерминированной нагрузке L и мощности блока $G_{\text{бл}}$ вероятность дефицита мощности

$$\mathcal{P}(D) = \sum_{k=0}^n B(k, n, q) \eta_k,$$

где идентификатор дефицитного состояния

$$\eta_k = \begin{cases} 0, & L < G_k; \\ 1, & L \geq G_k, \end{cases}$$

$G_k = kG_{\text{бл}}$ – располагаемая мощность генерации.

Математическое ожидание дефицита мощности

$$M(D) = \sum_{k=0}^n B(k, n, q, 0) \eta_k (L - G_k). \quad (5.1)$$

Пример 5.1. Определить вероятность и МО дефицита мощности в ЭЭС с мощностью нагрузки $L = 320$ МВт. Имеется электростанция с 4 блоками мощностью 100 МВт и коэффициентом неготовности $q = 0,1$. Расчеты сведены в табл. 5.1. В первом столбце таблицы представлено число работающих блоков. Во втором столбце – вероятность текущего состояния, которая может быть определена либо из справочных таблиц [26], либо на ЭВМ по встроенной функции (например, в Excel, Бином.расп()), либо по рекуррентному соотношению

$$\mathcal{P}_n^m = C_n^m p^m q^{n-m} = \mathcal{P}_n^{m-1} \frac{n-m+1}{m} \frac{p}{q}.$$

В частности, $p_n^0 = q^4 = 0,0001$; $p_n^1 = p_n^0(4/1)(0,9/0,1) = 0,0036$.

В третьем и четвертом столбцах представлены располагаемая мощность генерации и соответствующий дефицит мощности. Индикатор η дефицитности режима позволяет автоматизировать расчеты. Шестой столбец является произведением столбцов 2, 5, а столбец 7 –

произведением столбцов 4, 6. Сумма элементов столбцов 6, 7 определяет искомые результаты.

Таблица 5.1

Вероятность дефицита мощности при постоянстве нагрузки

1	2	3	4	5	6	7
k	p_k	$P_{\text{расп}}$	D	η	$\mathcal{P}(D)$	$M(D)$
0	1E-04	0	320	1	1E-04	0,032
1	0,0036	100	220	1	0,0036	0,792
2	0,0486	200	120	1	0,0486	5,832
3	0,2916	300	20	1	0,2916	5,832
4	0,6561	400	0	0	0	0
Сумма	1				0,3439	12,488

Следует заметить, что при вычислении МО дефицита мощности недостаточно ограничиваться максимальными вероятностями состояний системы генерации – вклад в результирующий показатель может быть достаточно большим при малых вероятностях. В частности, в рассматриваемом примере состояние $k = 2$ имеет вероятность $\mathcal{P}(D) = 0,0486$, в 6 раз меньше, нежели при $k = 3$ (0,2916), но вклад этих состояний в результирующую величину одинаков (5,83).

5.1.3. Непрерывная случайная нагрузка и детерминированная генерация

Условия: $G = \text{const}$, $L \sim N(m_L, \sigma_L)$. Функция распределения нагрузки – $F_L(x)$. Вероятность дефицита мощности

$$\mathcal{P}(D) = \mathcal{P}(L > G) = \mathcal{F}_L(G) = 1 - F_L(G).$$

МО дефицита мощности.

$$M(D) = \int_G^{\infty} (x - G) dF_L(x) = \int_G^{\infty} x dF_L(x) - G(1 - F_L(G)).$$

В свою очередь, согласно (1.25),

$$\int_G^{\infty} x dF_L(x) = m_L \mathcal{F}_L(G) + \sigma_L^2 f_L(G).$$

В результате

$$M(D) = (m_L - G) \mathcal{F}_L(G) + \sigma_L^2 f_L(G), \quad (5.2)$$

т. е. МО дефицита мощности определяется как разность МО нагрузки и располагаемой генерации (дефицит мощности) с вероятностью то-

го, что нагрузка будет больше, чем генерация плюс дисперсионная составляющая дефицита. Данная формула может быть использована как основная при расчетах МО дефицита мощности.

Может сложиться впечатление, что при большой располагаемой генерации, $m_L - G \ll 0$, МО дефицита также станет отрицательной величиной, но положительная дисперсионная составляющая делает $M(D) > 0$.

Пример 5.2. Пусть располагаемая мощность $G = 1000$ МВт, математическое ожидание нагрузки $m_L = 800$ МВт и стандартное (среднеквадратичное) отклонение нагрузки $\sigma_L = 150$ МВт.

Функция нормального распределения (по справочникам, например, источник [10])

$$F(G = 1000, m_L = 800, \sigma_L = 150) = 0,909.$$

Плотность нормального распределения

$$f(G = 1000, m_L = 800, \sigma_L = 150) = 0,00109.$$

Отсюда мат. ожидание дефицита мощности

$$\begin{aligned} M(D) &= (m_L - G)[1 - F_n(G)] + \sigma^2 f_n(G) = \\ &= (800 - 1000)(1 - 0,909) + 150^2 \cdot 0,00109 = 6,325 \text{ МВт.} \end{aligned}$$

При $m_L = 300$, $\sigma_L = 50$, $G = 400$: $F_L(G) = 0,977$, $f_L(G) = 0,00108$.

Отсюда $M(D) = (300 - 400)(1 - 0,977) + 50^2 \cdot 0,00108 = 0,4$ МВт.

5.1.4. Вероятностный характер нагрузки (нормальное распределение) и генерации (биномиальное распределение)

Вероятность дефицита мощности

$$\mathcal{P}(D) = \sum_{k=0}^n B(k, n, q) \mathcal{F}_n(G_k, m_L, \sigma_L), \quad (5.3)$$

где k – число отключенных блоков; $B(k, n, q)$ – вероятность биномиального распределения; $G_k = kP_{\text{бл}}$ – располагаемая мощность.

МО дефицита мощности

$$M(D) = \sum_{k=0}^n B(k, n, q) \eta_k M_k(D), \quad (5.4)$$

где $M_k(D)$ – МО дефицита мощности, соответствующее G_k , определяемое согласно (5.2):

$$M_k(D) = (m_L - G_k) \mathcal{F}_L(G_k) + \sigma_L^2 f_L(G_k). \quad (5.5)$$

Пример 5.3. Определить вероятность и МО дефицита мощности в ЭЭС с параметрами нагрузки $m_L = 320$, $\sigma_L = 30$ (нормальное рас-

пределение). Имеется электростанция с 4 блоками мощностью 100 МВт и коэффициентом неготовности $q = 0,1$.

Расчеты сведены в табл. 5.2. В первом столбце таблицы представлено число работающих блоков. Во втором столбце – вероятность текущего состояния (биномиальное распределение). В третьем столбце представлена располагаемая мощность, а в четвертом – вероятность дефицита мощности, соответствующая текущей располагаемой мощности. Столбец 5 является произведением столбцов 2, 4. Результирующая вероятность дефицита мощности, определяемая как сумма элементов столбца 5, $\mathcal{P}(D) = 0,27$. В столбце 8 приведены ожидаемые дефициты мощности, определяемые по (5.5), что позволяет вычислить (столбец 9) результирующее МО дефицита мощности (13,8 МВт).

В столбцах 6, 7 приведен часто используемый в практике упрощенный расчет МО дефицита (без учета дисперсии нагрузки): поскольку $D_i = P_L - G_i$, то $M(D_i) = m_L - G_i$. Нетрудно видеть, что упрощенный подход дает существенную погрешность. Кроме того, в столбце 6 появляются отрицательные величины, которые необходимо игнорировать или вводить индикатор дефицитности режима.

Таблица 5.2

Вероятность дефицита мощности при вероятностной нагрузке

1	2	3	4	5	6	7	8	9
k	p_k	G_k	$\mathcal{P}(D_k)$	$p_k \mathcal{P}(D_k)$	$m_n - G_k$	$(m_n - G_k)p_k$	$M(D_k)$	$qM(D_k)$
0	1E-04	0	1	1E-04	320	0,032	320	0,032
1	0,0036	100	1	0,0036	220	0,792	220	0,792
2	0,0486	200	1	0,0486	120	5,832	120	5,832
3	0,2916	300	0,748	0,218	20	5,832	24,53	7,154
4	0,6561	400	0,004	0,0025	-80		0,035	0,0233
Сум- ма	1			0,273		12,488		13,833

5.1.5. Дискретная нагрузка, дискретная генерация

Данный случай сводится к перемножению вероятностных рядов (ВР) [27; 28]. ВР нагрузки может быть представлен средней мощностью интервала с заданным шагом ΔL . Рассмотрим предыдущий пример. Расчеты при $\Delta L = \sigma_L$ приведены на рис. 5.3. Каждое дискретное состояние нагрузки L_k характеризуется вероятностью интервала ши-

риной ΔL с центром в L_k . Таблица дефицитности мощности определяется перекрестной разностью мощности нагрузки (верхняя строка) и генерации (левый столбец). Отрицательный дефицит обнуляется.

Таблице дефицита мощности соответствует расположенная ниже таблица вероятностей, полученная перекрестным произведением ряда вероятностей мощности нагрузки (верхняя строка) и генерации (левый столбец). Правая нижняя таблица предназначена для расчета МО дефицита и определяется поэлементным произведением таблиц дефицита мощности и соответствующих вероятностей. Сумма элементов последней таблицы равна искомому МО дефицита мощности. Здесь получен результат (13,745), практически совпадающий с полученным ранее (табл. 5.2) при непрерывной нагрузке (13,8).

mL	СКО	n	q	p	Рбл						
320	30	4	0,1	0,9	100	Дефицит мощности					
L	F(L)		Lk	pk			Нагрузка				
245	0,0062		260	0,061			260	290	320	350	380
275	0,0668		290	0,242		0	260	290	320	350	380
305	0,3085		320	0,383		100	160	190	220	250	280
335	0,6915		350	0,242		200	60	90	120	150	180
365	0,9332		380	0,061		300	0	0	20	50	80
395	0,9938					400	0	0	0	0	0
k	p	0,061	0,242	0,383	0,242	0,061					
0	1E-04	6E-06	2E-05	4E-05	2E-05	6E-06	0,0016	0,007	0,0123	0,0085	0,0023
1	0,0036	2E-04	9E-04	0,001	9E-04	2E-04	0,0349	0,1653	0,3033	0,2176	0,0611
2	0,0486	0,003	0,012	0,019	0,012	0,003	0,1767	1,0573	2,2332	1,7622	0,5301
3	0,2916	0,018	0,07	0,112	0,07	0,018	0	0	2,2332	3,5244	1,4136
4	0,6561	0,04	0,159	0,251	0,159	0,04	0	0	0	0	0
Сумм	1	Вероятность Д				0,251	МО ддефицита				Сумма
											13,745

Рис. 5.3. Произведение вероятностных рядов

5.1.6. Непрерывная генерация, непрерывная нагрузка

В отличие от предыдущих моделей генерация здесь рассматривается как непрерывная, нормально распределенная случайная величина. Как и ранее, анализируется небаланс мощности $N = L - G$. Положительным значениям небаланса мощности (НМ) соответствует дефицит, а отрицательным – резерв мощности.

Математическое ожидание НМ

$$m_N = M(L) - M(G) = m_L - nP_{бл}(1 - q).$$

Дисперсия НМ

$$\sigma_N^2 = \sigma_L^2 + \sigma_G^2 = \sigma_L^2 + npqP_{бл}^2.$$

В рассматриваемом примере $m_N = 320 - 400 \cdot 0,9 = -40$ МВт. Дисперсия НМ $\sigma_N^2 = 30^2 + 4 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 100^2 = 4500$ МВт². Стандартное отклонение $\sigma_N = 67,1$ МВт.

Для определения вероятностных параметров дефицита мощности (ДМ) необходимо ввести некоторые суждения относительно типа функции распределения. Предположим, что НМ описывается нормальным распределением (при увеличении числа агрегатов биномиальное распределение асимптотически стремится к нормальному). Тогда вероятность ДМ

$$\mathcal{P}(D) = \mathcal{F}_N(0, m_N, \sigma_N) = \mathcal{F}_N(0; -40; 67,1) = 0,275.$$

Эта величина почти совпадает с вероятностью $\mathcal{P}(D) = 0,273$, полученной при дискретной генерации (пример 5.3).

Определяемое по формуле (5.2) математическое ожидание ДМ $M(D) = (m_N - 0)\mathcal{F}_N(0) + \sigma_N^2 f_N(0) = 11,38$ МВт.

Это существенно отличается от МО 13,83 в примере 5.3. Дело в том, что свертка несимметричного биномиального и симметричного нормального распределений дает в результате несимметричное распределение. В то же время не стоит полностью отвергать подход через небаланс мощности. Уже при 10 агрегатах (пример, описанный ниже) результаты получаются практически одинаковыми.

5.2. Оптимальный резерв мощности в концентрированной ЭЭС

5.2.1. Детерминированная генерация

Одной из наиболее важных задач перспективного развития электроэнергетических систем является задача об оптимальном резерве мощности в энергосистеме. Обычно под резервом мощности подразумевается превышение располагаемой генерации над максимальной мощностью нагрузки P_{\max} . Однако в данном определении есть существенный недостаток – оно привязано к P_{\max} , которая, как правило, является случайной величиной. В то же время задачи развития ЭЭС главным образом связаны с оптимизацией инвестиций в генерирующую систему. При такой постановке в качестве резерва необходимо рассматривать дополнительную к существующей установленной мощности G_0 генерацию R . Но математически проще рассматривать суммарный резерв как превышение располагаемой генерации над мощностью нагрузки.

В качестве критерия оптимальности в экономических расчетах, как правило, принимается минимум приведенных затрат. Если какие-либо составляющие затрат имеют вероятностный характер, то данный критерий преобразуется в минимум математического ожидания (МО) приведенных затрат. В задаче об оптимальном резерве мощности вероятностный характер имеет ущерб $Y(R)$ от недоотпуска электроэнергии потребителям. Отсюда задача заключается в отыскании такого резерва R , который минимизирует МО приведенных затрат,

$$\min\{Z(R) = E_n K(R) + I_{ao} + \bar{Y}(R)\}. \quad (5.6)$$

В упрощенной постановке можно принять линейную модель капиталовложений и ежегодных издержек $K(R) = C_R R$,

$$I_{ao}(R) = p_{ao} K(R) = p_{ao} C_R R.$$

В этом случае выражение (5.6) преобразуется к виду

$$Z(R) = (E_n + p_{ao}) C_R R + \bar{Y}(R). \quad (5.7)$$

МО ущерба от недоотпуска электрической энергии $\bar{Y}(R)$ в общем случае является аддитивной функцией времени и в простейшем случае пропорционально суммарному за расчетный период (год) недоотпуску электроэнергии:

$$\bar{Y}(R) = y_0 \Delta \Theta = y_0 \sum_{t=1}^{8760} D(t, R) = 8760 y_0 M_d(R), \quad (5.8)$$

где $D(t, R)$ – дефицит мощности на интервале t ; y_0 – удельный ущерб от недоотпуска электроэнергии; $M_d(R)$ – МО дефицита мощности.

В общем случае y_0 зависит от глубины и длительности дефицита [29], т. е. имеет более сложный функциональный характер, однако здесь мы считаем его константой.

В выражении (5.8) принимается допущение о равномерном распределении события (дефицит мощности) во времени с плотностью вероятности $1/T = 1/8760$.

В свою очередь МО дефицита мощности при заданной генерации определяется соотношением

$$M_d(R) = \int_{G_0+R}^{\infty} (x - G_0 - R) dF_H(x).$$

Данный интеграл имеет другое, более интересное для практических приложений представление. Выполним преобразование интеграла методом интегрирования по частям. При $u = x - G_0 - R$, $du = dx$, $dv = dF_H(x) = -dF_H(x)$, $v = -F_H(x)$:

$$M_D(R) = -(x - G_0 - R)\mathcal{F}_H(x)|_{G_0+R}^{\infty} + \int_{G_0+R}^{\infty} \mathcal{F}_H(x)dx = \\ = \int_{G_0+R}^{\infty} \mathcal{F}_H(x)dx.$$

В первом слагаемом наблюдается неопределенность ($x = \infty$) · ($\mathcal{F}_H(\infty) = 0$). Методом Лопиталья можно показать, что при $x \rightarrow \infty$ предел данного произведения равен нулю. В результате показана справедливость соотношения

$$\int_a^{\infty} (x - a)dF_H(x) = \int_a^{\infty} \mathcal{F}_H(x)dx. \quad (5.9)$$

Таким образом, МО дефицита мощности определяется как площадь под кривой дополнительной функции распределения $\mathcal{F}_H(x)$, ограниченная слева установленной генерирующей мощностью $G_0 + R$ (рис. 5.4).

В результате МО приведенных затрат

$$\bar{3}(R) = (E_H + p_{ao})C_R R + \\ + 8760 y_0 \int_{G_0+R}^{\infty} \mathcal{F}_H(x)dx.$$

Оптимальный резерв мощности определяется из условия равенства нулю производной по R от функции приведенных затрат:

$$\frac{d}{dR} \bar{3}(R) = (E_H + p_{ao})C_R - 8760 y_0 \mathcal{F}_H(G_0 + R) = 0,$$

т. е. оптимальный дополнительный резерв мощности должен быть таким, чтобы вероятность дефицита мощности удовлетворяла условию

$$\mathcal{F}_{\text{опт}} = \mathcal{F}_H(G_0 + R_{\text{опт}}) = \frac{(E_H + p_{ao})C_R}{8760 y_0},$$

т. е. оптимальная вероятность дефицита мощности пропорциональна удельным капиталовложениям и обратно пропорциональна удельному ущербу. Данное соотношение известно под названием критерия Марковича [27]. Нетрудно видеть, что оптимальный резерв мощности определяется вероятностными параметрами (МО и дисперсия) функции распределения мощности.

Пример 5.4. Пусть $C_R = 200$ долл./кВт; $y_0 = 1$ долл./кВт·ч; отчисления на амортизацию и обслуживание $p_{ao} = 9\%$.

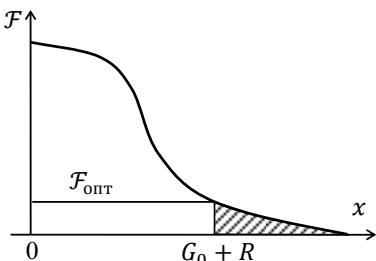


Рис. 5.1. Оптимальный резерв мощности

При оптимальном резерве $R_{\text{опт}}$ вероятность дефицита мощности

$$\mathcal{F}(R_{\text{опт}}) = \frac{(0,12 + 0,09)200}{1 \cdot 8760} = 0,004795$$

(в течение года допускается $0,004795 \cdot 8760 = 42$ ч состояния дефицита мощности). При заданных условиях оптимальный индекс надежности (вероятность бездефицитной работы) $F(R_{\text{опт}}) = 1 - \mathcal{F}(R_{\text{опт}}) = 0,9952$, т. е. оптимальный резерв мощности должен быть таким, чтобы обеспечить индекс надежности, равный 0,9952.

Пусть при $G_0 = 1100$ МВт математическое ожидание нагрузки $m_n = 1000$ МВт, $\sigma_n = 75$ МВт. При оптимальной вероятности отсутствия дефицита мощности оптимальная установленная мощность должна быть $G_0 + R_{\text{опт}} = F^{-1}(0,9952; 1000; 75) = 1194,2$ МВт. Таким образом, в ЭЭС необходимо установить дополнительные 94,2 (100) МВт.

Условие (5.9) не привязано к типу функции распределения случайной величины. Поэтому оно может быть распространено на математическое ожидание неотрицательных случайных величин. Действительно, согласно (5.9), математическое ожидание

$$m_X = \int_0^{\infty} (x - 0) dF_X(x) = \int_0^{\infty} F_X(x) dx,$$

то есть МО неотрицательных случайных величин равно площади под кривой дополнительной функции распределения. В частности, для экспоненциального распределения

$$m_X = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} dx = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Данный вывод не распространяется на произвольные случайные величины, поскольку нижний предел интеграла в (5.9), равный $-\infty$, не равен $a = 0$.

Индивидуальное задание

1. Рассмотреть представленную оптимизационную задачу в среде стандартного программного обеспечения (E el, MatCad, MatLab и др. В E el использовать процедуру «Поиск решения»). По критерию минимальных приведенных затрат определить оптимальный дополнительный резерв $R_{\text{опт}}$ мощности.

Приведенные затраты

$$Z = (E_n + p_{a0})C_R R + 8760 y_0 M_d(R),$$

где $E_n = 0,2$ – нормативный коэффициент эффективности; $p_{ao} = 0,1$ – отчисления на амортизацию и обслуживание; $C_R = 400$ долл./кВт – удельные капиталовложения в резервную мощность; $y_0 = 1$ долл./кВт·ч – удельный ущерб от недоотпуска электроэнергии потребителям; $\bar{D}(R)$ – зависящее от величины резерва МО дефицита мощности.

2. Графически изобразить зависимость $3(R)$ (подобно рис. 5.5).

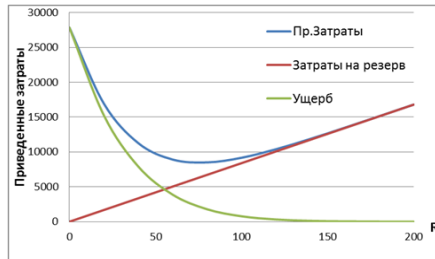


Рис. 5.5. Составляющие затрат

3. Рассмотреть объединенную систему «нагрузка + генерация» и нормально распределенную случайную величину – небаланс мощности $N = P_n - P_r$ с математическим ожиданием $M(N) = M(P_n) - M(P_r) = M(P_n) - (P_{уст} - M(P_{откл}))$ и дисперсией $D(N) = D(P_n) + D(P_{откл})$. Определить вероятность и МО дефицита мощности ($N > 0$). Сравнить результаты с ранее полученными при биномиальном распределении отключенных генераторов.

5.2.2. Вероятностный характер генерации

В описанной математической модели не учитывается вероятность отказа генераторов. Принимая во внимание, что система генерации описывается вероятностным рядом, МО дефицита мощности можно представить в виде

$$M(D) = \sum_{k=0}^{n+r} B(k, n, q) M_{Дk}, \quad (5.10)$$

где r – число вновь вводимых генераторов с заданной мощностью $P_{бл}$ (рассматриваемой, например, как инкремент мощности ВР); $B(k, n, q) = C_n^k (1-q)^k q^{n-k}$ – биномиальное распределение числа работающих генераторов в группе из n генераторов; C_n^k – число соче-

таний из n элементов по k ; M_{Dk} – МО дефицита мощности в системе с заданной генерацией $G_k = kP_{6л}$,

$$M_{Dk} = \int_{G_k}^{\infty} (x - G_k) dF_H(x) = (m_H - G_k)F_H(G_k) + \sigma_H^2 f_H(G_k).$$

Однако вновь вводимые блоки увеличивают число агрегатов в биномиальном распределении, поэтому в качестве искомой целесообразно взять целочисленную переменную r . Включение переменной r в число параметров ФР делает невозможным получение какого-либо упрощенного критерия, подобного критерию Марковича. Однако задача может быть решена как задача целочисленного нелинейного программирования с целевой функцией

$$\bar{Z}(R) = (E_H + p_{ao})C_R r P_{6л} + 8760 y_0 \sum_{k=0}^{n+r} B(k, n, q) M_{Dk}. \quad (5.11)$$

Иллюстрирующий данный подход расчет оптимального резерва мощности в среде Excel представлен на рис. 5.6. Варьируемым параметром здесь является число r дополнительно устанавливаемых генераторов. А в качестве целевой функции – приведенные затраты.

Р 6л	100		к-откл	p	Gk+R	1-Fk	Dk
n	11		0	0,205891	1500	1,31E-11	1,41E-10
q=0,1	0,1		1	0,343152	1400	4,82E-08	6,37E-07
p	0,9		2	0,266896	1300	3,17E-05	0,000536
Ен-рао	0,21		3	0,128505	1200	0,00383	0,088623
CR	400		4	0,042835	1100	0,091211	3,179634
y0	1		5	0,010471	1000	0,5	29,92067
G0	1100		6	0,001939	900	0,908789	103,1796
r	4		7	0,000277	800	0,99617	200,0886
G	1500		8	3,08E-05	700	0,999968	300,0005
mн	1000		9	2,66E-06	600	1	400
сн	75		10	1,77E-07	500	1	500
З	39967,75		11	8,96E-09	400	1	600
					Р дефицита	0,011715	
					МО дефицита		0,726912

Рис. 5.6. Расчет оптимального резерва мощности методом целочисленного нелинейного программирования

5.2.3. Небаланс мощности

Решение рассматриваемой оптимизационной задачи через ВР для реальной ЭЭС представляет существенные трудности на этапе построения ВР, длина которого резкого возрастает по мере увеличе-

ния числа генераторов n . Максимально возможное число элементов ВР (полная разнотипность агрегатов) определяется величиной 2^n . Это приводит к необходимости эквивалентирования ВР (5.10) появлению сопутствующих погрешностей, что определяет информационную неопределенность ВР. Дополнительно неопределенность ВР увеличивает большая неопределенность исходных данных (вероятности или интенсивности отказов) и плана капитальных и средних ремонтов, который, как правило, имеет неформализованный характер (согласование заявок на ремонт). Все это предопределяет целесообразность применения упрощенных процедур, к числу которых относится расчет МО небаланса мощности (НМ) через функцию НМ

$$N = P_n - G = P_n - (G_0 - \Delta G_0) - (R - \Delta R),$$

где G_0 – существующая установленная мощность генерирующей системы; ΔG_0 – суммарная мощность генераторов, находящихся в нерабочем состоянии (восстановления); R – дополнительный резерв; ΔR – часть дополнительного резерва, находящаяся в состоянии восстановления.

МО небаланса мощности

$$M(N) = m_{N_0} - pR,$$

где p – вероятность безотказной работы новых генерирующих блоков; m_{N_0} – МО НМ существующей системы. Эту величину можно найти как исходя из заданного состава генераторов и их регламентированных показателей надежности, так и на базе статистических наблюдений, что более предпочтительно, поскольку статистика основана на реальных показателях надежности.

Дисперсия небаланса мощности в основном определяется дисперсией НМ существующей подсистемы, поскольку дисперсия вновь вводимой генерации несоизмеримо меньше дисперсии существующего небаланса мощности (с учетом дисперсии нагрузки). Отсюда

$$\sigma^2(N) = \sigma^2(N_0) + pqrP_{6л} \approx \sigma^2(N_0). \quad (5.12)$$

Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\int_a^\infty \mathcal{F}_N(x, m, \sigma) dx = \int_{a+c}^\infty \mathcal{F}_N(x, m + c, \sigma) dx,$$

МО дефицита мощности можно представить в виде

$$\bar{D}(R) = \int_0^\infty \mathcal{F}_N(x, m_{N_0} - pR, \sigma_{N_0}) dx = \int_{pR}^\infty \mathcal{F}_N(x, m_{N_0}, \sigma_{N_0}) dx.$$

Отсюда оптимальный резерв должен удовлетворять критерию, который условно может быть определен как модифицированный критерий Марковича:

$$\mathcal{F}_N(pR_{\text{опт}}, m_{N_0}, \sigma_{N_0}) = \mathcal{F}_{\text{опт}} = (E_n + p_{\text{ао}})C_R/8760 y_0.$$

В рассматриваемом примере (пример 5.4) $\mathcal{F}_{\text{опт}} = 0,004795$. МО НМ в исходной системе $m_{N_0} = m_L - npP_{\text{бл}} = 1000 - 11 \cdot 0,9 \cdot 100 = 10$ МВт. Дисперсия $\sigma_{N_0}^2 = \sigma_L^2 + npqP_{\text{бл}}^2 = 75^2 + 11 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 100^2 = 15525$; $\sigma_{N_0} = 124,6$ МВт. В результате

$$pR = \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_{\text{опт}}, m_{N_0}, \sigma_{N_0}) = 301,8; R = 335 \text{ МВт.}$$

Данный резерв может рассматриваться как предварительная оценка. Уточнение возможно за счет более детального учета дисперсии в (5.12) поскольку известна оценка R . Если расширение системы генерации предполагается выполнить блоками $P_{\text{бл}} = 100$ МВт с вероятностью отказа $q_{\text{бл}} = 0,1$, то расчетная дисперсия НМ возрастает $D(N) = D(N_0) + pqRP_{\text{бл}} = 15525 + 0,1 \cdot 0,9 \cdot 335 \cdot 100 = 18540$; $\sigma_N = 136,16$.

$$pR = \mathcal{F}_N^{-1}(\mathcal{F}_{\text{опт}}, m_{N_0}, \sigma_{N_0}) = 328,9; R = 365 \text{ МВт.}$$

Принимая во внимание, что крутизна функции затрат при $R > R_{\text{опт}}$ меньше крутизны в левой части (рис. 5.5), округление R до величины, кратной мощности блока, выполняется в большую сторону, $R_{\text{опт}} = 400$ МВт, что согласуется с расчетами, выполненными методом целочисленного нелинейного программирования.

Выводы:

1. Оптимальный резерв мощности в ЭЭС может быть вычислен по упрощенной формуле, исходя из расчетного или нормативного индекса надежности и дополнительной функции распределения небаланса мощности.
2. При расчетах вероятностных параметров небаланса мощности необходимо учитывать вероятностный характер системы генерации.

5.2.4. Детерминированная нагрузка

При $\sigma_n = 0$ встроенная в Excel функция нормального распределения НОРМ.РАСП(x ; μ ; σ) не работает. В этом случае необходимо поставить «ловушку» на нулевую дисперсию. Детерминированная величина может рассматриваться как случайная с функцией распределения, имеющей единичный скачок в точке ее значения. В этом случае при программной реализации необходимо учесть фактор дис-

кретности либо логической процедурой, либо введением приемлемо малой дисперсии.

В то же время при детерминированной нагрузке единственной случайной величиной является располагаемая мощность (число отключенных блоков). Дефицит мощности наблюдается, если $P_n \geq P_{\text{расп}}$. Отсюда вероятность дефицита мощности можно определить, исходя из определения ФР:

$$P = 1 - B(P_n / P_{\text{бл}}, n, q),$$

где $B(\quad)$ – функция биномиального распределения.

Математическое ожидание дефицита мощности при детерминированной нагрузке может быть определено на базе биномиального распределения по формуле (5.2)

$$M(D) = P_{\text{бл}} \left[\left(\frac{P_n}{P_{\text{бл}}} - np \right) \left[1 - B_F \left(n - \frac{P_n}{P_{\text{бл}}}; n; q \right) \right] + \right. \\ \left. + npq \cdot B_f \left(n - \frac{P_n}{P_{\text{бл}}}; n; q \right) \right],$$

где B_F – интегральная, а B_f – дифференциальная функции биномиального распределения.

Домашнее задание. Получить вероятность и МО дефицита мощности при детерминированной нагрузке:

- 1) через вероятностный ряд генерации;
- 2) через формульное аналитическое представление;
- 3) через дополнительную случайную величину (небаланс мощности, $N = P_n - P_{\text{расп}}$), рассматривая ее как нормально распределенную величину;
- 4) построить график изменения математического ожидания дефицита мощности от $q \in (0,2 - 0,12)$;
- 5) на одном графике построить интегральную и дифференциальную функции распределения небаланса мощности $N = P_n - P_{\text{расп}}$ с вероятностным рядом генерации, а также кривую плотности распределения N , считая ее нормально распределенной величиной. Какой вывод можно сделать относительно аппроксимации реального распределения небаланса мощности $N = P_n - P_{\text{расп}}$ нормальным?

5.3. Число часов использования максимума и максимальных потерь

В перспективных расчетах для определения интегральных линейных характеристик (например, годовое потребление электроэнергии), как правило, используется интегральный показатель – число часов использования максимума нагрузки T_{\max} , а для интегральных квадратичных характеристик (например, годовые потери электроэнергии) – число часов максимальных потерь τ_{\max} . Если T_{\max} может быть определена на основе статистики, как $T_{\max} = \mathcal{E}/P_{\max}$, то для определения τ_{\max} нет необходимых статистических данных – данная величина определяется аналитически, как функция T_{\max} . С этой целью используется эмпирическая формула Залесского

$$\tau_{\max} = 8760 \left(0,124 + \frac{T_{\max}}{10^4} \right)^2. \quad (5.13)$$

Вероятностно-статистический анализ позволяет оценить погрешности расчетов по формуле Залесского.

Ограничимся простейшим случаем определения числа часов использования максимума T_{\max} и максимальных потерь τ , когда коэффициент мощности не зависит от режима и величины T_{\max} и τ_{\max} приближенно находятся по формулам

$$T_{\max} = \frac{\mathcal{E}}{P_{\max}} = \frac{1}{P_{\max}} \int_{t=0}^{8760} P(t) dt; \quad (5.14)$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{P_{\max}^2} \int_{t=0}^{8760} P^2(t) dt. \quad (5.15)$$

Если рассматривать $P(t)$ как равномерно распределенную на интервале $(0, T)$ случайную величину с плотностью распределения $f(t) = 1/T$, то, при $T = 8760$,

$$T_{\max} = \frac{M_P}{P_{\max}} 8760 = \frac{8760}{K_M};$$

$$\tau_{\max} = 8760 \frac{\kappa_2}{P_{\max}^2} = 8760 \frac{\sigma^2 + M_P^2}{P_{\max}^2} = 8760 \frac{1 + v^2}{K_M^2} = \frac{T_{\max}^2}{8760 K_M^2} (1 + v^2),$$

где $K_M = P_{\max}/M_P$ – коэффициент максимума; κ_2 – второй начальный момент; $v = \sigma/M_P$ – коэффициент вариации нагрузки.

Через коэффициент формы $k_\phi^2 = \kappa_2/M_P^2$:

$$\tau_{\max}(\kappa_2) = 8760 \frac{\kappa_2}{P_{\max}^2} = 8760 \frac{k_\phi^2}{K_M^2} = \frac{T_{\max}^2}{8760 K_M^2} k_\phi^2. \quad (5.16)$$

Таким образом, T_{\max} полностью определяется математическим ожиданием M_P и не зависит от дисперсии этой величины. Значение же τ_{\max} зависит как от математического ожидания, так и от дисперсии, причем в пределе разброс возможных значений τ_{\max} при заданном T_{\max} и отличающихся σ^2 может быть значительным.

Чтобы проиллюстрировать этот факт, рассмотрим простейший двухступенчатый график мощности с общим МО $T_{\max} = 12$, но разным временем продолжительности максимума T_M . В первом случае $T_M = 12$, во втором – практически равно 0. Оба графика показаны на рис. 5.7.

Применяя правило определения дисперсии (1.20) для обоих графиков, показанных на рис. 5.7, получаем:

$$\sigma^2(k_{P1}) = 0,5^2 \cdot 0,5 + 0,5^2 \cdot 0,5 = 0,25; \sigma^2(k_{P2}) = 0 \cdot 1 + 0,5^2 \cdot 0 = 0.$$

Подставляя заданные мощности и длительности интервалов в формулу (5.15) для τ_{\max} , находим:

$$\tau_{\max 1} = 0 \cdot 12 + 1^2 \cdot 12 = 12 \text{ ч}; \tau_{\max 2} = 0,5^2 \cdot 24 + 1^2 \cdot 0 = 6 \text{ ч}.$$

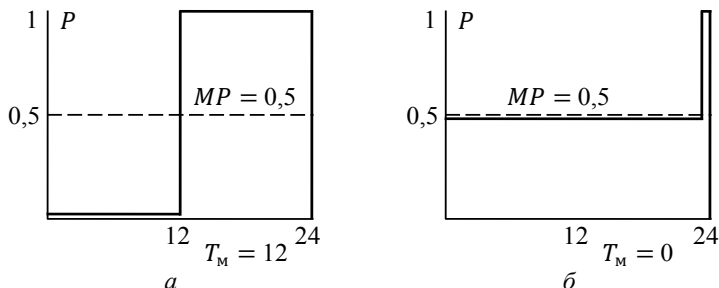


Рис. 5.7. Графики нагрузки при отличающихся длительностях пиковой нагрузки: *а* – максимальная дисперсия; *б* – нулевая дисперсия

Таким образом, при одном и том же T_{\max} полученные значения τ_{\max} отличаются друг от друга в два раза.

Формула Залесского. Приведенные в данном пункте соотношения показывают, что между величинами T_{\max} и τ не существует однозначной однопараметрической зависимости. С другой стороны, известна формула Залесского (5.13), приближенно описывающая такую

связь. В приведенных расчетах $T_{\max} = 8760/2 = 4380$ ч. Отсюда в том и другом вариантах

$$\tau_{\max} = 8760 \left(0,124 + \frac{T_{\max}}{10^4} \right)^2 = 8760(0,124 + 0,4380)^2 = 2766 \text{ ч.}$$

При пересчете к суткам это составляет 7,58 ч, что существенно отличается от полученных ранее $\tau_{\max1}$ и $\tau_{\max2}$.

При выводе формулы Залесского принималось во внимание, что большинство промышленных нагрузок электрической системы подчинено циклу односменного или двухсменного производства с продолжительностью максимума 8 или 16 часов (*покажите, что в обоих случаях точный расчет τ_{\max} достаточно близок к полученному по формуле Залесского*).

5.4. Расчет потерь энергии в сети постоянного тока при вероятностных нагрузках

Расчет потерь мощности и энергии в сетях переменного тока связан с громоздкими математическими преобразованиями, поэтому сначала мы рассмотрим упрощенную задачу – расчет потерь энергии в сети постоянного тока.

5.4.1. Дисперсионная составляющая потерь мощности

Потери мощности в линии электропередачи, соединяющей узлы i и j сети постоянного тока и имеющей проводимость Y_{ij} , определяются по формуле

$$\Delta P_{ij} = Y_{ij}(U_i - U_j)^2.$$

Для определения суммарных потерь мощности необходимо выполнить суммирование потерь по всем элементам электрической сети:

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma} &= \sum_{\forall \ell} \Delta P_{\ell} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (U_i - U_j)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} [(U_i)^2 - 2U_i U_j + (U_j)^2]. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} = 0$, получаем

$$\pi_{\Sigma} = -U^T Y U = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} U_i U_j. \quad (5.17)$$

Данное выражение можно получить иначе. Уравнения узловых напряжений в форме баланса мощности имеют вид:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} U_i U_j = P_i, \forall i. \quad (5.18)$$

Сумма генераций отличается от суммы нагрузок (с учетом инъекции мощности балансирующего узла на величину потерь). Таким образом,

$$\pi_{\Sigma} = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} U_i U_j.$$

Отсюда математическое ожидание потерь мощности

$$M(\pi_{\Sigma}) = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} M(U_i U_j). \quad (5.19)$$

Поскольку $M(U_i U_j) = \text{cov}(U_i, U_j) + MU_i MU_j$, то

$$M(\pi_{\Sigma}) = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} [\text{cov}(U_i, U_j) + MU_i MU_j].$$

В результате

$$M(\pi_{\Sigma}) = \pi_{\Sigma 0} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij} \text{cov}(U_i, U_j), \quad (5.20)$$

где $\pi_{\Sigma 0}$ – потери мощности, соответствующие МО напряжений:

$$\pi_{\Sigma 0} = - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} MU_i MU_j = -MU^T \cdot Y \cdot MU. \quad (5.21)$$

В формулах (5.20), (5.21) фигурируют неизвестные МО напряжений. Однако если пренебречь нелинейностью уравнений узловых напряжений (УУН), то, согласно (5.18), $\varphi(MU) = MP$ и МО напряжений приближенно можно определить из режима средних (МО) узловых нагрузок, решая систему уравнений узловых напряжений.

$$\sum_{\forall j} Y_{ij} MU_i MU_j = MP_i, i = 1, \dots, n. \quad (5.22)$$

Как известно, напряжения узлов электрической системы не измеряются непосредственно, а являются параметрами, зависящими от мощностей нагрузок узлов, которые регистрируются по меньшей мере два раза в год в дни контрольных замеров или чаще. В любом слу-

чае на основании наблюдений можно получить статистические характеристики нагрузок узлов (МО, дисперсии, корреляционные моменты). Возникает задача представления $K_U = \text{cov}(U)$ через $K_P = \text{cov}(P)$.

Статистические характеристики функционально зависимых величин ΔU по характеристикам ΔP можно найти из УУН, воспользовавшись формулами (1.57) и (1.60).

Выполняя линейную аппроксимацию $\varphi_i(U)$ (разложение в степенной ряд с ограничением только линейной составляющей) в точке (MP, U_0) , соответствующей (5.18)), получаем соотношение (1.58)

$$W\Delta U = \Delta P.$$

Отсюда

$$\Delta U = W^{-1}\Delta P, \quad (5.23)$$

где $\Delta U = U - U_0$; W – матрица Якоби, содержащая коэффициенты линеаризованных уравнений узловых напряжений (5.18) с элементами

$$W_{ij} = \frac{\partial \varphi_i(U_0)}{\partial U_j} = Y_{ij}U_{0i}, j \neq i;$$

$$W_{ii} = \frac{\partial \varphi_i(U_0)}{\partial U_i} = Y_{ii}U_{0i} + \frac{MP_i}{U_{0i}}.$$

Принимая допущение, что $U_0 \approx MU$, из (5.23) получаем

$$K_U = W^{-1}K_P(W^{-1})^T. \quad (5.24)$$

Подстановка данного выражения в (5.20) позволяет получить потери в электрической сети с учетом вероятностного характера нагрузок.

$$M(\pi_\Sigma) = \pi_{\Sigma 0} - \langle Y, K_U \rangle,$$

где $\langle Y, K_U \rangle = \sum_i \sum_j Y_{ij}K_{Uij}$ – скалярное произведение матриц Y, K_U .

Представленный подход интересен не только для получения потерь энергии, но и как некоторая общая идея, показывающая, что во многих случаях для анализа характеристик, определяющихся всевозможными колебаниями случайных параметров режима электрической системы, достаточно учесть только математические ожидания и корреляционные моменты соответствующих случайных величин.

5.4.2. Уточненный расчет МО и матрицы корреляционных моментов напряжений

В представленных в пп. 5.4.1 расчетах фигурируют МО напряжений, которые определяются решением уравнений узловых напряжений при МО узловых мощностей (5.22). При этом оговаривалось,

что из-за нелинейности УУН полученный вектор U_0 напряжений является лишь приближенной оценкой МО. Желательно получить более точные оценки MU и $\text{cov}(U)$.

Квадратичная аппроксимация уравнений (5.18) в окрестности точки (U_0, MP) , соответствующей МО нагрузок, определяется выражением:

$$\begin{aligned} \varphi_i(U) = \varphi_{0i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} (U_j - U_{0j}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j \partial U_s} (U_j - U_{0j})(U_s - U_{0s}) = MP_i + \Delta P_i, \end{aligned}$$

где $\varphi_i(U) = \sum_{vj} Y_{ij} U_i U_j$ – сетевая составляющая УУН; $\Delta P_i = P_i - MP_i$.

С учетом баланса мощности, $\varphi_{0i} = MP_i$, рассматриваемое уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} (U_j - U_{0j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j \partial U_s} (U_j - U_{0j})(U_s - U_{0s}) = \\ = \Delta P_i, \forall i. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} M[(x - a)(y - b)] &= M[(\Delta x - \Delta a)(\Delta y - \Delta b)] = \\ &= M(\Delta x \Delta y - \Delta a \Delta x - \Delta b \Delta y + \Delta a \Delta b) = \\ &= \text{cov}(x, y) + \Delta a \Delta b, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $\Delta x = x - m_x$; $\Delta a = a - m_x$; $\Delta y = y - m_y$; $\Delta b = b - m_y$.

Применительно к напряжениям условие (5.26) имеет вид:

$$M[(U_j - U_{0j})(U_s - U_{0s})] = \text{cov}(U_j, U_s) - \Delta U_{0j} \Delta U_{0s},$$

где $\Delta U_{0j} = U_{0j} - MU_j$, $\Delta U_{0s} = U_{0s} - MU_s$.

Уточненное значение МО напряжений может быть определено в результате применения операции МО к уравнению (5.25):

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} (MU_j - U_{0j}) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j \partial U_s} [\text{cov}(U_j, U_s) - \Delta U_{0j} \Delta U_{0s}] = \\ = 0, \forall i. \end{aligned}$$

В результате определяемое в матричном виде МО напряжений имеет вид:

$$MU = U_0 - W^{-1}R, \quad (5.27)$$

где W – матрица Якоби функционального вектора φ ,

$$W = \left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial U_j} \right] = \begin{cases} Y_{ij} U_{0i}, & j \neq i; \\ Y_{ii} U_{0i} + \frac{MP_i}{U_{0i}}, & j = i \end{cases},$$

а дополнительно введенный вектор R состоит из компонент

$$R_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{s=1}^n \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j \partial U_s} [\text{cov}(U_j, U_s) - \Delta U_{0j} \Delta U_{0s}].$$

В свою очередь, матрица Гессе H_i имеет вид

$$H_i = \left[\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j \partial U_s} \right] = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ Y_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ Y_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 2Y_{ii}, & j = i, s = i. \end{cases}$$

Структура матрицы Гессе представлена на рис. 5.8. Нетрудно видеть, что в силу симметрии матриц Гессе и ковариаций компонента R_i представляет сумму поэлементного произведения строк с номером i матриц Гессе и ковариаций. Отсюда

$$R = \langle Y, [K_U - \Delta U_0 (\Delta U_0)^T] \bar{1} \rangle. \quad (5.28)$$

0			Y_{1i}	0			
			Y_{2i}				
Y_{i1}	Y_{i2}		$2Y_{ii}$				Y_{in}
0				0			
			Y_{ni}				

Рис. 5.8. Структура матрицы Гессе H_i

Ключевые для определения матрицы ковариации напряжений соотношения (5.23), (5.24) допускают уточнение МО напряжений. Поскольку $\Delta U = U - U_0$ в (5.23) не является отклонением напряжений от своего МО, то более правильным является соотношение:

$$M(\Delta U = U - U_0) = \text{cov}(U) - U_0 (U_0)^T = W^{-1} \text{cov}(P) (W^{-1})^T,$$

или

$$\text{cov}(U) = U_0(U_0)^T + W^{-1}\text{cov}(P)(W^{-1})^T. \quad (5.29)$$

Добавка $U_0(U_0)^T$ позволяет улучшить результаты расчета потерь по (5.20).

5.4.3. Квадратичная аппроксимация функции потерь

Существует несколько иной подход к определению МО суммарных потерь [3]. Представим выражение потерь мощности в окрестности точки математических ожиданий напряжений MU рядом Тейлора, с учетом квадратичной составляющей:

$$\begin{aligned} \pi_\Sigma &= \pi_{\Sigma 0} + \pi_D = \\ &= \pi_{\Sigma 0} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \pi_\Sigma}{\partial U_i} \Delta U_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 \pi_\Sigma}{\partial U_i \partial U_j} \Delta U_i \Delta U_j, \end{aligned} \quad (5.30)$$

где π_Σ , как функции напряжений, определяются выражением (5.17), которое для более явного определения частных производных можно записать в несколько ином виде, выделяя произвольную переменную U_s :

$$\begin{aligned} -\pi &= \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} Y_{ij} U_i U_j = U_s \sum_{\forall i} Y_{is} U_i + \sum_{\forall i} \sum_{j \neq s} Y_{ij} U_i U_j = \\ &= Y_{ss} U_s^2 + 2U_s \sum_{j \neq s} Y_{sj} U_j + \sum_{i \neq s} \sum_{j \neq s} Y_{ij} U_i U_j. \end{aligned}$$

Отсюда частные производные

$$\frac{\partial \pi}{\partial U_s} = -2 \sum_{\forall j} Y_{sj} U_j; \quad \frac{\partial^2 \pi}{\partial U_s \partial U_r} = -2Y_{sr}.$$

Поскольку матрица H вторых производных при квадратичной аппроксимации потерь мощности с точностью до знака совпадает с удвоенной матрицей проводимостей, $H = -2Y$, то последний член в (5.30) может быть представлен в матричном виде:

$$\pi_D = \frac{1}{2} \sum_{\forall i, j} \frac{\partial^2 \pi_\Sigma}{\partial U_i \partial U_j} \Delta U_i \Delta U_j = -(\Delta U)^T Y \Delta U. \quad (5.31)$$

Подставляя выражение (5.23) в формулу (5.31), находим новое матричное выражение для квадратичной составляющей потерь мощности:

$$\pi_D = -(\Delta P)^T \mathcal{B} \Delta P, \quad (5.32)$$

где \mathcal{B} – так называемая **матрица квадратичных коэффициентов потерь энергии**,

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{B}_{ij}\} = (W^{-1})^T Y W^{-1}. \quad (5.33)$$

При этом математическое ожидание потерь мощности

$$M(\pi_{\Sigma}) = \pi_{\Sigma 0} + M(\pi_D) = \pi_{\Sigma 0} - \sum_{\forall i,j} B_{ij} \text{cov}(P_i, P_j). \quad (5.34)$$

В полученном выражении матрица ковариаций напряжений не участвует в явном виде, и следует ожидать более точных по сравнению с методикой 5.4.1 результатов.

Упрощенное представление матрицы Якоби. Выражение (5.34) допускает дальнейшее упрощение, связанное с приближенной записью матрицы B . Если при определении матрицы Якоби пренебречь дополнительными составляющими в диагональных элементах матрицы Якоби, MP_i/MU_i , и считать все напряжения узлов одинаковыми, $U_i = U_B$, то легко убедиться в справедливости формулы

$$W \approx U_B Y. \quad (5.35)$$

Подставляя (5.35) в формулу матрицы B , находим:

$$B = \frac{1}{U_B^2} (Y^{-1})^T \cdot Y Y^{-1} = \frac{1}{U_B^2} Z,$$

где $Z = Y^{-1}$ – матрица узловых сопротивлений.

Формула (5.34) в этом простейшем случае запишется так

$$M(\pi_{\Sigma}) = \pi_{\Sigma 0} - \frac{1}{U_B^2} \sum_{\forall i,j} Z_{ij} \text{cov}(P_i, P_j). \quad (5.36)$$

Проверочные расчеты показывают, что данная формула дает некоторое улучшение по сравнению с расчетом потерь по МО напряжений, но снижение погрешности расчетов здесь незначительно и данный подход не может быть рекомендован для практических расчетов.

5.4.4. Самостоятельная работа

Пример 5.1. Выполнить расчет потерь мощности в среде E el (MatCad, Ma Lab и др.) для заданной электрической сети постоянного тока. Структура расчетов потерь мощности в среде E el для четырехузловой схемы показана на рис. 5.9, 5.10.

Методические указания. Заданные в относительных и именованных единицах графики нагрузок, которые рассматриваются как случайные реализации, а также расчет МО и дисперсий нагрузок представлены в строках 15–25 (рис. 5.9).

В строках 26–30 приводится процедура определения корреляционных моментов нагрузок. Блок вторых начальных моментов A28:C30 определяется матричным произведением транспонированного блока F18:H21 на блок J18:L21. Блок перекрестных произведений МО мощностей F28:H30 определяется перекрестным скалярным про-

изведением строки J22:L22. Результирующая матрица ковариаций мощностей узлов (блок J28:L30) определяется разностью блоков A28:C30 и F28:H30.

Расчет матрицы коэффициентов корреляции (блок V34:D36) приводится для оценки корреляционной зависимости нагрузок узлов. Следует обратить внимание, что по диагонали этой матрицы расположены единицы. Величина 0,87 говорит об относительно высокой положительной корреляционной зависимости мощностей первого и второго узлов.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Сеть постоянного тока													
2											Мат. ожидания			
3							Y				P0	U0		
4							-3	1	1		14,67	8,497		
5							1	-3	2		22,25	8,032		
6							1	2	-4		-20	9,184		
7														
8							Y*U0 (адемарово пр.)				Матрица Якоби W(U0)			
9							-25,5	8,5	8,5		-23,8	8,5	8,5	
10							8,0	-24,1	16,1		8,0	-21,3	16,1	
11							9,2	18,4	-36,7		9,2	18,4	-38,9	
12											(Y*U0 плюс диагональ P/U			
13														
14														
15							МВт/о.е.							
16							20	30	-40		P=P*ti/24			
17	t						P1	P2	p3		P1	P2	p3	
18	6	0,2	0,50	0,4			4	15	-16		1	3,75	-4	
19	8	1	1,00	0,8			20	30	-32		6,67	10	-10,7	
20	6	1	0,80	0,4			20	24	-16		5	6	-4	
21	4	0,6	0,50	0,2			12	15	-8		2,00	2,50	-1,33	
22	24										14,67	22,25	-20	
23											MO			
24											261,3	537,8	480,0	
25											46,2	42,7	80	
26											6,8	6,5	8,944	
27							MO(Pi)*MO(Pj)				Cov(P)			
28							14,67	22,25	-20,00		46,22	38,67	-32	
29							22,25	326,3	495,1	-445,0		38,67	42,69	-51
30							-20	-293,3	-445,0	400,0		-32	-51	80
31														
32	Коэффициенты корреляции													
33							W^-1				Cov(U)			
34							-0,091	-0,083	-0,054		0,719	0,847	0,497	
35							-0,078	-0,144	-0,076		0,847	1	0,576	
36							-0,058	-0,087	-0,075		0,497	0,576	0,38	

Рис. 5.9. Структура расчетов корреляционной матрицы напряжений

Расчет электрического режима, соответствующего МО нагрузок, выполнен отдельно, например с помощью специализированного пакета расчета установившегося режима (нами использовалась процедура «Поиск решения»), и приведен в строках 4–6 (столбцы K, L). Соответствующая ему матрица Якоби приведена в строках 9–11 столбцов K–M. Обратная матрица Якоби и вычисленная по формуле (5.24) матрица корреляционных моментов напряжений приведены в строках 34–36.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
38	Математическое ожидание потерь мощности										
39	Y*Cov(U)				Связи						
40	-2,16	0,847	0,497		N	K	Y	UN	UK	Pi	
41	0,847	-3	1,153		1	2	1	8,497	8,032	0,216	
42	0,497	1,153	-1,52		1	3	1	8,497	9,184	0,473	
43	Дисперсионная				1	4	1	8,497	10	2,26	
44	составляющая потерь				2	3	2	8,032	9,184	2,657	
45				1,685	3	4	1	9,184	10	0,665	
46	Суммарные потери				7,96		Потери по МО U			6,271	
47	Погрешность				10%		Погрешность			29%	
48											
49	Прямые расчеты потерь мощности (расчеты режимов)										
50	t	6	8	6	4	24	Стат. Среднее				
51	P1	4	20	20	12		14,67				
52	P2	15	30	24	15		22,25				
53	p3	-16	-32	-16	-8		-20				
54							Стат. Среднее				
55	U1	9,62	7,90	7,48	8,65		8,35				
56	U2	9,31	7,25	6,84	8,31		7,8365				
57	U3	9,96	8,99	8,27	9,04		9,0606				
58											
59	π	1,21	12,94	14,24	4,07						
60				Суммарные потери			8,855				

Рис. 5.10. Структура расчетов потерь мощности в среде Excel

Поэлементное произведение матриц Y и $\text{cov}(U)$, а также сумма элементов полученной матрицы, определяющая дисперсионную составляющую потерь мощности, и результирующие потери приведены в столбцах A–D строк 40–47 (рис. 5.10). В этих же строках (для сравнения с упрощенными расчетами) приведен расчет потерь в каждом из элементов электрической сети по напряжениям, соответствующим

МО нагрузок (эту процедуру можно выполнить проще – по формуле (5.21), выполнить самостоятельно). В строках 49–60 приведен точный расчет потерь мощности, позволяющий сделать оценку погрешностей методов.

Нетрудно видеть, что погрешность расчетов без учета дисперсионной составляющей (ячейка K47) существенно больше погрешности расчета с учетом дисперсионной составляющей (ячейка D47) (29 % по сравнению с 10 %).

Расчет потерь мощности через матрицу квадратичных коэффициентов потерь энергии (5.33) представлен на рис. 5.11, где в блоках T52:V54, X52:Z54 представлены соответственно определяемая по формуле (5.33) матрица B и ее поэлементное произведение на матрицу корреляционных моментов мощности (блок J28:L30 на рис. 5.9). Ниже получены суммарные потери мощности и дана оценка погрешности расчетов (8,6 %). Это чуть лучше, чем в расчетах по методу пп. 5.4.1.

	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AB
49										
50										
51	доп.матрица BB				BB covP					
52		-0,015	-0,015	-0,009		-0,675	-0,587	0,287		
53		-0,015	-0,027	-0,014		-0,587	-1,152	0,700		
54		-0,009	-0,014	-0,010		0,287	0,700	-0,794	-1,821	
55							Суммарные потери		8,093	
56							погрешность		8,60%	
57										

Рис. 5.11. Матрица квадратичных коэффициентов потерь энергии

Коррекция МО и матрицы корреляционных моментов напряжений позволяет существенно улучшить результаты (рис. 5.12). Определяемые согласно (5.27) новые МО напряжений представлены в блоке J76:J78 (рис. 5.12). Для этого, согласно (5.28), предварительно вычисляется матрица R (блок D76:F78) и ее построчные суммы (блок G76:G78).

Обновленная согласно (5.29) матрица ковариаций напряжений представлена блоком A83:C85. Нетрудно видеть, что обновленные дисперсии напряжений несколько возросли. Увеличились и составляющие потерь (H86:H89). При этом погрешность потерь снизилась

до уровня 3,1 %, что говорит о высокой эффективности процедуры коррекции МО и матрицы корреляционных моментов напряжений.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
75	P0	mU0		R			R*1		ΔU	MU	eps	
76	14,67	8,497		-2,16	0,847	0,4974	-0,814		0,1498	8,347	0,04%	
77	22,25	8,032		0,847	-3	1,1525	-1,001		0,1978	7,834	0,03%	
78	-20	9,184		0,497	1,153	-1,52	0,1299		0,1254	9,059	0,02%	
79						Построчная сумма				10		
80												
81	Новая матрица ковариаций											
82	covU_new				Y*covU							
83	0,742	0,877	0,516		-2,23	0,8766	0,5162					
84	0,877	1,039	0,601		0,877	-3,118	1,2021					
85	0,516	0,601	0,396		0,516	1,2021	-1,583					
86				Дисперсионная составляющая				1,7364				
87				Потери по МО U				7,39				
88				Суммарные Потери				9,1264				
89				Погрешность				-3,1%				

Рис. 5.12. Коррекция МО и матрицы ковариаций напряжений

Таким образом, учет дисперсионной составляющей при определении потерь мощности и энергии дает достаточно хорошую оценку результирующих показателей. При этом если в качестве статистического набора данных рассматривается типовой суточный график нагрузки, то расчет режима выполняется только один раз – с МО нагрузок, а не 24 режима на суточном периоде, необходимые для точной оценки потерь.

5.5. Расчет потерь энергии в сети переменного тока

5.5.1. Расчетные выражения

Потеря мощности в линии, соединяющей узлы i и j сети переменного тока, имеющей проводимость Y_{ij} , определяется как разность мощностей в начале и конце линии по формуле

$$\Delta S_{ij}^* = S_{ij}^* + S_{ji}^*.$$

При этом

$$S_{ij}^* = \dot{U}_i^* \dot{I}_{ij} = Y_{ij} \dot{U}_i^* (\dot{U}_i - \dot{U}_j);$$

$$S_{ji}^* = Y_{ij} \dot{U}_j^* (\dot{U}_j - \dot{U}_i) = -Y_{ij} \dot{U}_j^* (\dot{U}_i - \dot{U}_j).$$

Отсюда

$$\Delta S_{ij}^* = Y_{ij} (\dot{U}_i - \dot{U}_j) (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^*.$$

В результате аналог формулы (5.17) потерь мощности для сети переменного тока имеет вид:

$$\Delta S_{\Sigma}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \Delta S_{ij}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (\dot{U}_i - \dot{U}_j) (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^*. \quad (5.37)$$

Поскольку произведение скобок

$$\Delta U_{ij}^2 = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^* = (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^2 \quad (5.38)$$

является вещественным числом, то

$$\begin{aligned} \Delta P_{\Sigma} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} G_{ij} \Delta U_{ij}^2; \\ \Delta Q_{\Sigma} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} \Delta U_{ij}^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Декартова система координат. Выражение (5.38) в декартовой системе координат имеет вид:

$$\Delta U_{ij}^2 = (\dot{U}_i - \dot{U}_j) (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^* = V_i^2 + V_j^2 - 2U_i' U_j' - 2U_i'' U_j''.$$

Подставляя данное выражение в (5.37) и принимая во внимание, что $\sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} = 0$, получаем

$$\Delta S_{\Sigma}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \Delta S_{ij}^* = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (U_i' U_j' + U_i'' U_j'').$$

Математическое ожидание потерь мощности

$$\begin{aligned} M(\Delta S_{\Sigma}^*) &= - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (\text{cov } U_{ij}' + \text{cov } U_{ij}'' + MU_i' MU_j' + MU_i'' MU_j'') = \\ &= \Delta S_{\Sigma}^{0*} - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (\text{cov } U_{ij}' + \text{cov } U_{ij}''), \end{aligned}$$

где (по аналогии с (5.21))

$$\begin{aligned} \Delta S_{\Sigma}^{0*} &= - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} (MU_i' MU_j' + MU_i'' MU_j'') = \\ &= -(M\dot{U})^T Y (M\dot{U}) \end{aligned} \quad (5.40)$$

– потери мощности в электрической сети, соответствующие МО мощностей.

Учет вещественного характера (5.38) позволяет разделить МО потерь на активные и реактивные составляющие

$$\begin{aligned}
\Delta P_{\Sigma}^* &= \Delta P_{\Sigma}^{0*} + \Delta P_{\text{дисп}} \\
&= \Delta P_{\Sigma}^{0*} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} (\text{cov } U'_{ij} + \text{cov } U''_{ij}); \\
\Delta Q_{\Sigma}^* &= \Delta Q_{\Sigma}^{0*} + \Delta Q_{\text{дисп}} \\
&= \Delta Q_{\Sigma}^{0*} - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} (\text{cov } U'_{ij} + \text{cov } U''_{ij}).
\end{aligned} \tag{5.41}$$

Как было отмечено ранее, реально в ЭЭС нет статистики напряжений узлов (тем более при ее разделении на продольную и поперечную составляющие, или по модулю и углу), но зато существует статистика активных и реактивных мощностей узлов. Отсюда, как и ранее, ставится задача выражения матрицы корреляционных моментов напряжений через аналогичные матрицы мощностей. С этой целью в области МО нагрузок выполняется линейная аппроксимация уравнений узловых напряжений. При этом

$$J \begin{pmatrix} \Delta U' \\ \Delta U'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} J_{PU'} & J_{PU''} \\ J_{QU'} & J_{QU''} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta U' \\ \Delta U'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}, \tag{5.42}$$

где $\Delta U'$, $\Delta U''$, ΔP , ΔQ – отклонения рассматриваемых величин от своих МО; J – соответствующая МО нагрузок матрица Якоби, представленная своими 4 блоками производных функций баланса активных и реактивных мощностей по переменным U' , U'' .

Применяя формальное правило определения ковариации вещественного вектора в линейном матричном уравнении (5.42), записанном через расширенные векторы $\Delta U = (\Delta U', \Delta U'')^T$, $\Delta S = (\Delta P, \Delta Q)^T$ в виде $W \Delta U = \Delta S$, можно получить ковариацию напряжений

$$\text{cov}(U) = W^{-1} \text{cov}(S) (W^{-1})^T, \tag{5.43}$$

$$\begin{aligned}
\text{где } \text{cov}(U) &= \begin{pmatrix} K_{U'U'} & K_{U'U''} \\ K_{U''U'} & K_{U''U''} \end{pmatrix}; \quad W = \begin{pmatrix} W_{PU'} & W_{PU''} \\ W_{QU'} & W_{QU''} \end{pmatrix}; \quad \text{cov}(S) = \\
&= \begin{pmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Дисперсионная составляющая потеря мощности в (5.41) определяется через сумму всех элементов поэлементного произведения (скалярное произведение) матрицы $\text{cov}(U)$ и матрицы проводимостей, соответственно G и B :

$$\Delta P_{\text{дисп}} = \langle G, K_U \rangle; \quad \Delta Q_{\text{дисп}} = \langle B, K_U \rangle.$$

Пример 5.2. Выполнить расчет потерь мощности в сети переменного тока с учетом дисперсионной составляющей.

Электрическая сеть (2 узла) представлена на рис. 5.13. Исходные данные (R, X, G, B) по связям показаны в блоке A3:F6. На их основе построены матрицы проводимостей G, B (блок B8:E10). Случайные реализации активной и реактивной мощности узлов записаны в блоке B13:E17. Их средние значения (режим МО) – в блоке B18:E18.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L		
1	Потери мощности. Дисперсионная составляющая.							2 узла. сеть переменного тока						
2	Связи:													
3	N	K	R	X	G	B								
4	1	2	1	6	0,027	0,162								
5	1	3	2	8	0,029	0,118								
6	2	3	2	10	0,019	0,096								
7														
8	G			B										
9	-0,056			0,027										
10	0,027			-0,046										
11														
12	P1		P2		Q1		Q2							
13	1,5		0,8		0,6		0,2							
14	2,4		1,6		0,75		1,2							
15	3		1,6		0,9		1,4							
16	3		2		1		2							
17	1,8		0,8		0,7		0,2							
18	MO	2,34	1,36	0,79	1									
19								U1'	U1''	U2'	U2''	ΔP	ΔQ	
20								9,77	-0,93	9,88	-0,85	0,063	0,276	
21								8,84	-1,56	8,73	-1,44	0,254	1,117	
22								8,38	-1,84	8,31	-1,59	0,375	1,644	
23								7,76	-1,93	7,46	-1,71	0,567	2,510	
24								9,63	-1,07	9,79	-0,94	0,084	0,363	
25								8,99	-1,46	8,96	-1,31	0,210	0,919	
26												π_ср	0,269	1,182
27												ε MO	-22%	-22,3%
28														

Рис. 5.13. Сеть переменного тока. 3 узла

Для анализа погрешности расчетных процедур выполнен расчет напряжений и потерь мощности во всех представленных режимах (в том числе и в режиме МО нагрузок, блок G13:L18). Средние потери мощности определены в блоке K19:L19. Нетрудно видеть, что погрешность расчета потерь по МО нагрузок (блок K18:L18) составляет около 22 % (блок K20:L20).

Процедура определения корреляционной матрицы мощностей представлена на рис. 5.14. Здесь блок B24:E28 центрированных мощностей $[\tilde{P}, \tilde{Q}]$ получен путем вычитания из блока B12:E17 (рис. 5.13) исходных мощностей строки средних мощностей B18:E18. Искомая матрица $\text{cov}(S)$ корреляционных моментов (блок G24:J27, рис. 5.14) получена по формуле

$$\text{cov}(S) = \frac{1}{N-1} [\tilde{P}, \tilde{Q}]^T [\tilde{P}, \tilde{Q}].$$

Главные блоки этой матрицы соответствуют корреляционным моментам активной и реактивной мощности:

$$\begin{bmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{bmatrix}.$$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
21															
22		Центрированные мощности													
23		P1	P2	Q1	Q2		cov S					Коэффициенты корреляции			
24		-0,28	-0,28	-0,19	-0,4		0,47	0,34	0,10	0,51		1	0,93	0,95	0,95
25		0,02	0,12	-0,04	0,1		0,34	0,29	0,08	0,42		0,93	1	0,90	0,99
26		0,22	0,12	0,11	0,2		0,10	0,08	0,03	0,12		0,95	0,90	1	0,93
27		0,22	0,32	0,21	0,5		0,51	0,42	0,12	0,62		0,95	0,99	0,93	1
28		-0,18	-0,28	-0,09	-0,4										

Рис. 5.14. Корреляционная матрица мощностей

Определенная согласно (1.35) матрица коэффициентов корреляции приведена для анализа взаимозависимости мощностей узлов. В рассматриваемом примере наблюдается сильная корреляционная связь между мощностями узлов.

Расчет результирующих потерь мощности в рассматриваемой сети переменного тока приведен на рис. 5.15.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
30		G		Gb	B		Bb		U	I		Матрица Якоби			
31		-0,056	0,027	0,029	-0,280	0,162	0,118		8,99	0,146		-0,68	0,48	-2,56	1,42
32		0,027	-0,046	0,019	0,162	-0,258	0,096		8,96	0,079		0,46	-0,62	1,42	-2,38
33		0,280	-0,162	-0,118	-0,056	0,027	0,029		10,50	-0,075		-2,30	1,42	1,16	-0,48
34		-0,162	0,258	-0,096	0,027	-0,046	0,019		-1,46	-0,027		1,42	-2,12	-0,46	0,89
35		-B		-Bb	G		Gb		-1,31						
36									0						
37															
38		cov U					Сумма диаг блоков					ΔP	ΔQ		
39		0,6521	0,7859	0,3587	0,3114						Дисп.	0,047	0,212		
40		0,7859	0,95	0,4302	0,3754		0,853	0,9589			Всего	1,284	5,653		
41		0,3587	0,4302	0,2009	0,173		0,9589	1,1004			Погрешность	-4,4%	-4,4%		
42		0,3114	0,3754	0,173	0,1504										
43															

Рис. 5.15. Потери мощности в сети переменного тока

Соответствующие режиму МО нагрузок узловые токи получены умножением расширенной (за счет проводимостей на базу) матрицы проводимостей (блок B31:G34) на расширенный вектор напряжений (блок I31:I36), полученный из режима МО нагрузок. Матрица Якоби формируется построчным произведением матрицы проводимостей на вектор напряжений с последующим суммированием диагональной матрицы из узловых токов:

$$W = \begin{bmatrix} G & B \\ -B & G \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} U' \\ U'' \end{bmatrix} + \text{diag}(I),$$

где операция $\begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \end{bmatrix}$ определяет поэлементное произведение связываемых данной операцией матриц.

Матрица ковариаций напряжений (блок В39:Е42) определяется согласно формуле:

$$K_U = \begin{bmatrix} K_{U'U'} & K_{U'U''} \\ K_{U''U'} & K_{U''U''} \end{bmatrix} = W^{-1} \text{cov}(S) (W^{-1})^T.$$

На ее основе формируется блок G40:H41 суммы ковариаций $K_U = K_{U'U'} + K_{U''U''}$. Дисперсионная составляющая потерь мощности (блок L39:M39) определяется через сумму всех элементов произведения (скалярное произведение) полученной матрицы K_U на блоки проводимостей:

$$\Delta P_{\text{дисп}} = \langle G, K_U \rangle; \Delta Q_{\text{дисп}} = \langle B, K_U \rangle.$$

В ячейках L40:M41 представлены суммарные потери и погрешности расчетной модели. Нетрудно видеть, что полученная погрешность (–4,4 %) расчета потерь с учетом дисперсионной составляющей намного меньше, чем без ее учета (–22 %).

5.5.2. Уточненный расчет МО и матрицы корреляционных моментов напряжений в сети переменного тока

При разделении системы уравнений узловых напряжений на активную и реактивную составляющие баланса мощности

$$\sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} U_i^* U_j = \sum_{j=1}^{n+1} (G_{ij} - jB_{ij}) [(U_i' U_j' + U_i'' U_j'') + j(U_i' U_j'' - U_i'' U_j')] = S_i^*,$$

$$i = 1, \dots, n,$$

УУН приобретают следующую структуру

$$\begin{pmatrix} \varphi(U', U'') \\ \psi(U', U'') \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

С целью получения более точных значений МО и корреляционных моментов напряжений по аналогии с пп. 5.4.2 выполняется квадратичная аппроксимация УУН в окрестности многомерной точки (U_0, MS) , соответствующей МО мощностей MS :

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \varphi(U_0', U_0'') \\ \psi(U_0', U_0'') \end{pmatrix} + W \begin{pmatrix} U' - U_0' \\ U'' - U_0'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\varphi(\Delta U) \\ R_\psi(\Delta U) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} MP \\ MQ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.44)$$

где W – матрица Якоби функций $\varphi(U', U'')$, $\psi(U', U'')$; $R(\Delta U)$ – определяемая вторыми производными составляющая УУН:

$$R_{\varphi,i}(\Delta U) = \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U'_s \partial U'_k} \Delta U'_s \Delta U'_k + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U'_s \partial U''_k} \Delta U'_s \Delta U''_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U''_s \partial U'_k} \Delta U''_s \Delta U'_k + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U''_s \partial U''_k} \Delta U''_s \Delta U''_k, \forall i; \quad (5.45)$$

$$R_{\psi,i}(\Delta U) = \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U'_s \partial U'_k} \Delta U'_s \Delta U'_k + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U'_s \partial U''_k} \Delta U'_s \Delta U''_k + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U''_s \partial U'_k} \Delta U''_s \Delta U'_k + \frac{1}{2} \sum_{\forall s} \sum_{\forall k} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U''_s \partial U''_k} \Delta U''_s \Delta U''_k, \forall i. \quad (5.46)$$

Принимая во внимание выбор точки, в которой осуществляется аппроксимация (U_0 соответствует МО S), выражение (5.44) трансформируется к более простому виду:

$$W \begin{pmatrix} U' - U'_0 \\ U'' - U''_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{\varphi}(\Delta U) \\ R_{\psi}(\Delta U) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta P \\ \Delta Q \end{pmatrix}.$$

Математические ожидания рассматриваемых случайных величин связаны соотношением

$$\begin{pmatrix} MU' \\ MU'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_0 \\ U''_0 \end{pmatrix} - W^{-1} \begin{pmatrix} MR_{\varphi}(\Delta U) \\ MR_{\psi}(\Delta U) \end{pmatrix}. \quad (5.47)$$

Данная формула может использоваться для уточненной оценки МО напряжений.

Рассмотрим отдельные составляющие данного выражения.

Баланс активной мощности:

$$\varphi_i(U', U'') = \sum_{j=1}^{n+1} G_{ij} (U'_i U'_j + U''_i U''_j) + \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} (U'_i U''_j - U''_i U'_j) = \\ = P_i.$$

Баланс реактивной мощности:

$$\psi_i(U', U'') = - \sum_{j=1}^{n+1} G_{ij} (U'_i U''_j - U''_i U'_j) + \sum_{j=1}^{n+1} B_{ij} (U'_i U'_j + U''_i U''_j) = \\ = Q_i.$$

Матрица Якоби для УУН в декартовых координатах в окрестности точки (U_0, MS) , соответствующей МО нагрузок, определяется выражением:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi_i}{\partial U'_j} &= \begin{cases} G_{ij}U'_i - B_{ij}U''_i, & j \neq i; \\ (G_{ii}U'_i - B_{ii}U''_i) + I'_i, & j = i; \end{cases} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial U''_j} &= \begin{cases} B_{ij}U'_i + G_{ij}U''_i, & j \neq i; \\ (B_{ii}U'_i + G_{ii}U''_i) + I''_i, & j = i; \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial U'_j} &= \begin{cases} B_{ij}U'_i + G_{ij}U''_i, & j \neq i; \\ (B_{ii}U'_i + G_{ii}U''_i) - I'_i, & j = i; \end{cases} \\ \frac{\partial \psi_i}{\partial U''_j} &= \begin{cases} -G_{ij}U'_i + B_{ij}U''_i, & j \neq i; \\ (-G_{ii}U'_i + B_{ii}U''_i) + I'_i, & j = i, \end{cases}\end{aligned}\quad (5.48)$$

где

$$\begin{aligned}I'_i &= \operatorname{Re} \left(\frac{S_i^*}{U_i^*} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} (G_{ij}U'_j + B_{ij}U''_j); \\ I''_i &= \operatorname{Im} \left(\frac{S_i^*}{U_i^*} \right) = \sum_{j=1}^{n+1} (G_{ij}U''_j - B_{ij}U'_j).\end{aligned}$$

Данные соотношения можно записать в матричной форме:

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} W_{U'}^P & W_{U''}^P \\ W_{U'}^Q & W_{U''}^Q \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} G & B \\ B & -G \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} U' \\ U'' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -B & G \\ G & B \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} U'' \\ U' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \operatorname{diag}(I') & \operatorname{diag}(I'') \\ -\operatorname{diag}(I'') & \operatorname{diag}(I') \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Матрица Гессе вторых производных функций небаланса мощности определяется дифференцированием (5.48):

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U'_j \partial U'_s} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ G_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ G_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 2G_{ii}, & j = i, s = i; \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U'_j \partial U''_s} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ -B_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ B_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 0, & j = i, s = i; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U''_j \partial U'_s} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ B_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ -B_{ij}, & j = i, s \neq i; \\ 0, & j = i, s = i; \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U''_j \partial U''_s} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ G_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ G_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 2G_{ii}, & j = i, s = i; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j' \partial U_s'} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ B_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ B_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 2B_{ii}, & j = i, s = i; \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j' \partial U_s''} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ G_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ -G_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 0, & j = i, s = i; \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j'' \partial U_s'} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ -G_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ G_{ij}, & j = i, s \neq i; \\ 0, & j = i, s = i; \end{cases} \quad \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j'' \partial U_s''} = \begin{cases} 0, & j \neq i, s \neq i; \\ B_{ij}, & j \neq i, s = i; \\ B_{is}, & j = i, s \neq i; \\ 2B_{ii}, & j = i, s = i. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что структурно представленные выражения отражаются матрицами типа рис. 5.8. Подставляя полученные выражения вторых производных, получаем:

$$\begin{aligned} \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j' \partial U_s'} \Delta U_j' \Delta U_s' &= 2 \sum_{\forall j} G_{ij} \Delta U_i' \Delta U_j'; \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j' \partial U_s''} \Delta U_j' \Delta U_s'' &= \sum_{\forall j} B_{ij} (\Delta U_i' \Delta U_j'' - \Delta U_i'' \Delta U_j'); \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j'' \partial U_s'} \Delta U_j'' \Delta U_s' &= \sum_{j \neq i} B_{ij} (\Delta U_i'' \Delta U_j' - \Delta U_i' \Delta U_j''); \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial U_j'' \partial U_s''} \Delta U_j'' \Delta U_s'' &= 2 \sum_{\forall j} G_{ij} \Delta U_i'' \Delta U_j''; \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j' \partial U_s'} \Delta U_j' \Delta U_s' &= 2 \sum_{\forall j} B_{ij} \Delta U_i' \Delta U_j'; \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j' \partial U_s''} \Delta U_j' \Delta U_s'' &= \sum_{\forall j} G_{ij} (\Delta U_i' \Delta U_j'' - \Delta U_i'' \Delta U_j'); \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j'' \partial U_s'} \Delta U_j'' \Delta U_s' &= \sum_{\forall j} G_{ij} (\Delta U_i'' \Delta U_j' - \Delta U_i' \Delta U_j''); \\ \sum_{\forall j} \sum_{\forall s} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial U_j'' \partial U_s''} \Delta U_j'' \Delta U_s'' &= 2 \sum_{\forall j} B_{ij} \Delta U_i'' \Delta U_j''. \end{aligned}$$

При этом выражения (5.45), (5.46) могут быть записаны в виде:

$$R_{\varphi i} = \sum_{\forall j} G_{ij} \Delta U'_i \Delta U'_j + \sum_{\forall j} G_{ij} \Delta U''_j \Delta U''_i ;$$

$$R_{\psi i} = \sum_{\forall j} B_{ij} \Delta U'_i \Delta U'_j + \sum_{\forall j} B_{ij} \Delta U''_j \Delta U''_i .$$

Напомним, что здесь $\Delta U_i = U_i - U_{0i}$. При этом, согласно (5.26), $M(\Delta U_i, \Delta U_j) = \text{cov}(U_i, U_j) + \Delta U_{0i} \Delta U_{0j}$, где $\Delta U_{0i} = \Delta U_{0i} - m_{U_i}$.

Математическое ожидание:

$$MR_{\varphi i} = \sum_{\forall j} G_{ij} \text{cov}(\Delta U'_i \Delta U'_j) + \sum_{\forall j} G_{ij} \text{cov}(\Delta U''_j \Delta U''_i) ;$$

$$MR_{\psi i} = \sum_{\forall j} B_{ij} \text{cov}(\Delta U'_i \Delta U'_j) + \sum_{\forall j} B_{ij} \text{cov}(\Delta U''_j \Delta U''_i) .$$

В матричном виде это выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} MR_{\varphi i} \\ MR_{\psi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle G, \text{cov}(U_{\Sigma}) \rangle \\ \langle B, \text{cov}(U_{\Sigma}) \rangle \end{pmatrix},$$

где

$$\text{cov}(U_{\Sigma}) = \text{cov}(U' U') + \text{cov}(U'' U'') + \Delta U'_0 (\Delta U'_0)^T + \Delta U''_0 (\Delta U''_0)^T .$$

В результате согласно (5.47), уточненное значение МО напряжений:

$$\begin{pmatrix} MU' \\ MU'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U'_0 \\ U''_0 \end{pmatrix} - W^{-1} \begin{pmatrix} \langle G, \text{cov}(U_{\Sigma}) \rangle \\ \langle B, \text{cov}(U_{\Sigma}) \rangle \end{pmatrix}.$$

Дополнение к примеру 5.2

Рассмотрим, как уточнение МО напряжений повлияет на погрешность расчетных потерь. Уточненный расчет показан на рис. 5.16.

Сумма диагональных блоков корреляционной матрицы напряжений, полученной на базе U_0 , представлена в блоке B45:C46. Поэлементное произведение этого блока на блоки G и B вычислено в блоках F45:G46. Соответствующие построчные суммы определены в блоке H45:H48. Умножение вычисленной ранее обратной матрицы Якоби на блок H45:H48 позволяет получить поправку к МО (J45:J48) и обновленные МО (блок L46:M48).

Потери мощности, соответствующие новым значениям МО напряжений, определяются согласно (5.40). При этом используются

расширенные матрицы G (блок A51:C53), B (блок D51:F53), формируются блоки перекрестных произведений действительных (блок H51:J53) и мнимых (блок K51:M53) составляющих напряжений, а также их сумма (блок A56:C58).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
44	Sd=Cov U11+Cov U22					Сумма			ΔMU				
45		0,853	0,959		G Sd	-0,048	0,026	-0,02		0,125		MU new	
46		0,959	1,100			0,026	-0,051	-0,02		0,143		8,861	-1,46
47					B Sd	-0,239	0,156	-0,08		0,001		8,817	-1,31
48						0,156	-0,284	-0,13		-0		10,5	0
49													
50	G			B			U**trU'			U''*trU''			
51	-0,056	0,027	0,029	-0,280	0,162	0,118	78,5	78,1	93,0	2,14	1,92	0	
52	0,027	-0,046	0,019	0,162	-0,258	0,096	78,1	77,7	92,6	1,92	1,72	0	
53	0,029	0,019	-0,049	0,118	0,096	-0,214	93,0	92,6	110,3	0	0	0	
54													
55	Сумма блоков					ΔP	ΔQ			ΔP	ΔQ		
56	80,7	80,0	93,0		ΔS Дик	0,047	0,212			Сумма	0,277	1,221	
57	80,0	79,5	92,6		ΔS MC	0,23	1,009			Точно	0,269	1,182	
58	93,0	92,6	110,3							ε	3,2%	3,3%	

Рис. 5.16. Расчет потерь по уточненным МО и корреляционным моментам напряжений

На базе уточненных МО и ковариаций напряжений путем суммирования произведения элементов блоков проводимостей и матрицы A56:C58 получены новые значения потерь мощности (блок F57:G57). Суммирование этих потерь с ранее полученными дисперсионными составляющими (блок F56:G56) позволяет получить новые суммарные значения потерь мощности. Нетрудно видеть, что погрешность расчета потерь снизилась до уровня 3 %, что говорит о необходимости процедуры уточнения расчетов МО напряжений.

Полярные координаты. При решении задачи в полярных координатах составляющая потеря мощности (5.38) преобразуется к виду

$$\Delta U_{ij}^2 = (\dot{U}_i - \dot{U}_j)^2 = V_i^2 + V_j^2 - 2V_i V_j \cos \delta_{ij}.$$

При этом, согласно (5.37), результирующие потери

$$\Delta S_{\Sigma} = -2 \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} V_i V_j \cos \delta_{ij}, \quad (5.49)$$

где $Y = (G, B)$ в зависимости от того, какие потери мощности вычисляются – активные или реактивные.

Обобщая полученные ранее математические выводы относительно формулы потерь мощности и принимая во внимание тривиальное соотношение МО $M(x - x_0) = 0$, можно записать:

$$M(\Delta S_{\Sigma}) = \Delta S_{\Sigma}^0 + M\left(\frac{1}{2} \sum_{\forall i} \sum_{\forall j} \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{x_0} \Delta x_i \Delta x_j\right).$$

Применительно к (5.49) данное выражение может быть представлено в виде

$$M(\Delta S_{\Sigma}) = \Delta S_{\Sigma}^0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^0}{\partial V_i \partial V_j} K_{V_i V_j} + \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^0}{\partial V_i \partial \delta_j} K_{V_i \delta_j} + \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^0}{\partial \delta_i \partial V_j} K_{\delta_i V_j} + \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^0}{\partial \delta_i \partial \delta_j} K_{\delta_i \delta_j} \right),$$

где $K_{V_i V_j}$, $K_{V_i \delta_j}$, $K_{\delta_i V_j}$, $K_{\delta_i \delta_j}$ – элементы матрицы корреляционных моментов напряжений и углов.

Матрица Якоби. Как было отмечено выше, матрица корреляционных моментов напряжений по аналогии с (5.43) выражается через матрицу Якоби W и матрицу корреляционных моментов мощностей:

$$\begin{pmatrix} K_{\delta\delta} & K_{\delta V} \\ K_{V\delta} & K_{VV} \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} K_{PP} & K_{PQ} \\ K_{QP} & K_{QQ} \end{pmatrix} J^T.$$

Для определения матрицы Якоби

$$W = \begin{pmatrix} \partial P / \partial \delta & \partial P / \partial V \\ \partial Q / \partial \delta & \partial Q / \partial V \end{pmatrix}$$

выполняется линейная аппроксимация УУН, которые для сети переменного тока в форме баланса активной и реактивной мощности в полярных координатах имеют вид:

$$P_i = \sum_{j=1}^{n+1} V_i V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} - B_{ij} \sin \delta_{ij}), \quad i = 1, \dots, n;$$

$$Q_i = \sum_{j=1}^{n+1} V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Соответствующая им матрица Якоби определяется выражением:

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_i} = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij}) = -Q_i + B_{ii} V_i^2;$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij});$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_i} = G_{ii} V_i + \sum_{j=1}^{n+1} V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} - B_{ij} \sin \delta_{ij}) = G_{ii} V_i + \frac{P_i}{V_i};$$

$$\frac{\partial P_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \cos \delta_{ij} - B_{ij} \sin \delta_{ij});$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_i} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n+1} V_i V_j (G_{ij} \cos \delta_{ij} - B_{ij} \sin \delta_{ij}) = P_i - G_{ii} V_i^2;$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial \delta_j} = V_i V_j (-G_{ij} \cos \delta_{ij} + B_{ij} \sin \delta_{ij});$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_i} = B_{ii} V_i + \sum_{j=1}^{n+1} V_j (G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij}) = B_{ii} V_i + \frac{Q_i}{V_i};$$

$$\frac{\partial Q_i}{\partial V_j} = V_i (G_{ij} \sin \delta_{ij} + B_{ij} \cos \delta_{ij}).$$

Представленные выражения элементов матрицы Якоби согласуются с источником [30].

Вторые производные от (5.49) по переменным V, δ :

$$\frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^*}{\partial \delta_i \partial \delta_j} = -4Y_{ij} V_i V_j \cos \delta_{ij}; \quad \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^*}{\partial V_i \partial \delta_j} = \frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^*}{\partial \delta_i \partial V_j} = -4Y_{ij} V_j \sin \delta_{ij};$$

$$\frac{\partial^2 \Delta S_{\Sigma}^*}{\partial V_i \partial V_j} = -4Y_{ij} \cos \delta_{ij}.$$

Отсюда

$$M(\Delta S_{\Sigma}^*) = \Delta S_{\Sigma}^0 - \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} \left(V_i^0 V_j^0 \cos \delta_{ij}^0 K_{\delta_i \delta_j} + 2V_j^0 \sin \delta_{ij}^0 K_{V_i \delta_j} + \cos \delta_{ij}^0 K_{V_i V_j} \right). \quad (5.50)$$

Известно, что функциональная связь между модулями и углами напряжений, а также взаимосвязь между углами напряжений узлов в электрической сети, не существенна (рис. 5.17, блок К38:N41). Кроме того, синусы разностей углов по связям практически равны нулю. Превалирующее значение в (5.50) имеет последняя составляющая. Следует отметить, что расчет дисперсионных составляющих потерь не приводит к абсолютно точному результату в силу вероятностного

характера нагрузки. Все это дает основание пренебречь первой и второй составляющими в (5.50). В результате

$$M(\Delta P_{\Sigma}) = \Delta P_{\Sigma}^0 - 2 \sum (G \otimes K_{VV});$$

$$M(\Delta Q_{\Sigma}) = \Delta Q_{\Sigma}^0 - 2 \sum (B \otimes K_{VV}).$$

#	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
37	W				covPQ				cov δV					
38	-24	-13,4	-0,26	0,223	0,468	0,342	0,104	0,51	7E-04	8E-05	0,013	0,016		
39	-13,3	-22,2	0,268	-0,27	0,342	0,288	0,077	0,42	8E-05	1E-04	0,004	0,006		
40	7,018	-2,02	-2,46	1,48	0,104	0,077	0,026	0,118	0,013	0,004	0,3	0,383		
41	-2,44	5,153	1,464	-2,23	0,51	0,42	0,118	0,62	0,016	0,006	0,383	0,496		
42														
43	U				G*cov(VV)				B*cov(VV)				Сост	ΔP
44	δ	0,161			-0,02	0,01			-0,08	0,062			дисп	0,038
45		0,146			0,01	-0,02			0,062	-0,13			МО	0,210
46													Всего	0,248
47	v	9,104											ε	-7,7%
		9,056												-7,4%

Рис. 5.17. Расчет потерь мощности в полярных координатах

На рис. 5.17 показан упрощенный расчет потерь мощности для сети переменного тока (пример 5.2) в полярных координатах. Специфику имеет расчет матрицы Якоби (блок A38:D41), которая повлияла на матрицу ковариаций напряжений (блок K38:N41). Соответствующие МО нагрузок углы и модули напряжений узлов представлены в блоке A43:I47. Результирующий расчет потерь представлен в блоке K43:M47, где дисперсионная составляющая потерь (блок K44:M44) определяется как сумма составляющих соответственно блоков E44:F45 и H44:I45. Несколько бóльшая (по сравнению с предыдущими расчетами) погрешность определяется сделанными допущениями, позволяющими существенно снизить трудоемкость расчетов.

Таким образом, из-за относительно большой погрешности оценка потерь мощности по режиму МО нагрузок не может быть рекомендована для практических расчетов. При расчетах дисперсионной составляющей важной процедурой является уточнение МО напряжений. При этом допустимы упрощающие расчеты, основанные на игнорировании корреляционной связи углов и модулей напряжений узлов.

5.6. Расчет вероятностных параметров установившегося режима

В задачах оценки режимной надежности ЭЭС одним из ключевых моментов является отклонение напряжений узлов от номинальных значений на величину, большую предельно допустимых значений, и превышение токов в связях, предельно ограниченных по кри-

териям термической стойкости или статической устойчивости. Если вероятность такого события превышает величину, приемлемую по критерию допустимого риска, то в ЭЭС принимаются некоторые управляющие воздействия, направленные на увеличение надежности функционирования ЭЭС.

В задаче оценки вероятностных характеристик напряжений: графики или статистические выборки нагрузок, на базе которых определяется матрица корреляционных моментов $\text{cov } P$, считаются заданными. Эта матрица может быть задана априори в качестве исходных данных. Требуется определить вероятностные параметры $\{MU, \text{cov } U\}$ напряжений узлов и токов $\{MI, \text{cov } I\}$ в связях.

5.6.1. Расчет установившегося режима сети постоянного тока

Уравнения узловых напряжений в линейной форме баланса токов:

$$YU + U_6 Y_6 = I.$$

Отсюда

$$U = Y^{-1}(I - U_6 Y_6).$$

Математическое ожидание напряжений

$$M(U) = Y^{-1}(M(I) - U_6 Y_6).$$

Матрица ковариаций

$$\text{cov}(U) = Y^{-1} \text{cov}(I) (Y^{-1})^T.$$

Однако, как было упомянуто ранее, статистические наблюдения осуществляются, в основном, для мощностей, а не токов и напряжений, поэтому больший интерес представляют УУН в форме баланса мощностей:

$$\varphi_i = \sum_{j=1}^{n+1} Y_{ij} U_i U_j = P_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

или в матричной форме,

$$\varphi(U) = P.$$

При этом матрица корреляционных моментов имеет вид (5.24):

$$\text{cov}(U) = (\varphi')^{-1} \text{cov}(P) ((\varphi')^{-1})^T.$$

Наличие внедиагональных элементов в матрице $\text{cov}(U)$ не позволяет определить вероятность выхода напряжения того или иного узла из области допустимых значений (или определить диапазон напряжений, соответствующих некоторой вероятности допустимости).

Решением проблемы является переход системы к новым координатам (замена декартового базиса на базис из собственных векторов).

Каждая матрица, в том числе и матрица ковариаций $\text{cov}(U)$, является матрицей линейного преобразования, которой ставится в соответствие матрица собственных векторов $H = \{\bar{h}_i\}$ (таких, которые не меняют свое направление при линейном преобразовании, т. е. $\text{cov}(U) h_i = \lambda_i h_i$) [15]. При этом

$$\text{cov}(U) = H \Lambda H^{-1},$$

где $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$ – диагональная матрица из собственных чисел.

В силу симметрии матрицы $\text{cov}(U)$ все собственные числа являются вещественными. При этом матрицу собственных векторов можно сделать ортонормированной (преобразование Грама – Шмидта).

В системе координат $\{\bar{h}_i\}$ напряжениям $\{U_i\}$ соответствуют переменные $\{X_i\}$, $U = HX$, а матрице $\text{cov}(U)$ соответствует диагональная матрица Λ , которая является матрицей ковариаций переменных X . Поскольку внедиагональные элементы матрицы ковариации Λ равны нулю, то переменные $\{X_i\}$ являются попарно независимыми. При этом вероятность совместного события $X_i \in S_i, \forall i$

$$P\{X_1 \in S_1, \dots, X_i \in S_i, \dots, X_n \in S_n\} = \prod_{i=1}^n P\{X_i \in S_i\},$$

а многомерная функция распределения

$$F\{x_1, \dots, x_n\} = \prod_{i=1}^n F_i(x_i).$$

Это существенно упрощает задачу определения вероятности принадлежности области $P\{U_i \in (U_{i \min}, U_{i \max})\}$. Векторам (U_{\min}, U_{\max}) соответствуют $X_{\min} = H^T U_{\min}$, $X_{\max} = H^T U_{\max}$. Поскольку известны МО $MX = H^T(MU)$, то при принятом законе распределения X_i (например, нормальном) с параметрами MX и дисперсией $\sigma_{X_i}^2 = \lambda_i$ нетрудно определить вероятности принадлежности заданному интервалу $p_i = P\{X \in (X_{i \min}, X_{i \max})\}$ отдельных переменных, а следовательно, и искомую вероятность объединенного события $P\{U_i \in (U_{i \min}, U_{i \max})\} = \prod_{i=1}^n p_i$.

5.6.2. Численные примеры вероятностного анализа режимов электрических систем

Пример 5.3. Для заданных характеристик нагрузок и параметров электрической сети определить математические ожидания, дисперсии и корреляционные моменты мощностей.

Электрическая сеть, показанная на рис. 5.18, связывает районы потребления, нагрузка и генерация которых зависит от большого

числа случайных факторов и поэтому является случайной величиной. Элементами исходного вероятностного пространства будем считать часы суток, вероятность каждого элемента одинакова (равномерное распределение), $p(w_i) = 1/24$. Множества случайных величин нагрузок определяются суточными графиками, показанными в табл. 5.3 (столбцы P_1, P_2, P_3 как функции времени – столбца «интервалы t »). В этой же таблице приводится расчет искомых величин. С целью унификации расчетов рассматриваемый период времени разбит на подинтервалы неизменности нагрузок всех узлов.

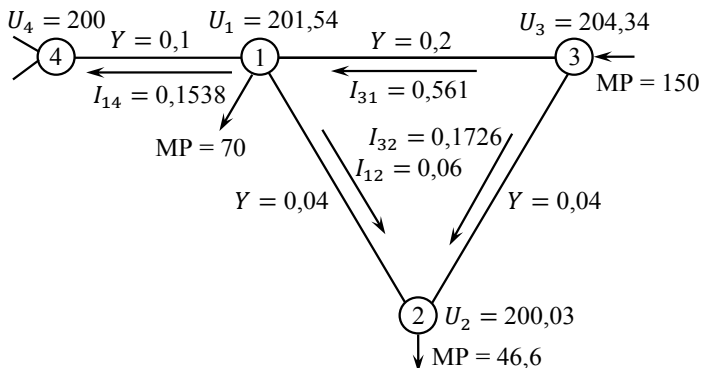


Рис. 5.18. Схема района системы для расчета потерь

МО нагрузок определяются как средневзвешенные от мощностей с весами, определяемыми длительностями интервалов (столбец « Δt »). В частности, $M(P_1) = (8 \cdot 50 + 4 \cdot 80 + 4 \cdot 80 + 8 \cdot 80)/24 = 70$. Знак минус в формулах математического ожидания мощности узла 3 учитывает, что в данном узле генерация превышает потребление.

Дисперсии нагрузок, как и ковариации, определяются через вторые начальные моменты $M(P_i P_j)$ – в табл. 5.3 столбцы справа от P_3 . При этом $\text{cov}(P_i, P_j) = M(P_i P_j) - M(P_i)M(P_j)$. Дисперсии нагрузок определяются как собственные ковариации $\sigma^2(P_i) = \text{cov}(P_i, P_j)$. Матрица корреляционных моментов, а также соответствующая ей матрица коэффициентов корреляции, матрица Якоби и ковариационная матрица напряжений представлены отдельно в табл. 5.4. Нетрудно видеть, что между мощностями 1 и 3, а также 2 и 3 узлов наблюдается существенная корреляционная связь. В процессе решения уравнений

узловых напряжений методом Ньютона была определена матрица Якоби W , что позволило получить ковариационную матрицу напряжений $\text{cov}(U)$. Эти матрицы представлены в табл. 5.4.

Таблица 5.3

Статистическая обработка графиков нагрузки

интервалы t	Δt	P_1	P_2	P_3	$P_1 P_1$	$P_1 P_2$	$P_1 P_3$	$P_2 P_2$	$P_2 P_3$	$P_3 P_3$
0–8	8	50	20	–200	2500	1000	–10000	400	–4000	40000
8–12	4	80	20	–200	6400	1600	–16000	400	–4000	40000
12–16	4	80	20	–100	6400	1600	–8000	400	–2000	10000
16–24	8	80	100	–100	6400	8000	–8000	10000	–10000	10000
Средне- взвешенное		70	46,7	–150	5100	3533	–10000	3600	–5667	25000
cov					200,0	266,7	500	1422	1333	2500

Таблица 5.4

Матрицы ковариации и коэффициентов корреляции

cov(P)			r			W			cov(U)		
200,0	266,7	500,0	1	0,5	0,71	–68,2	8,1	40,3	19,9	32,7	25,9
266,7	1422	1333	0,5	1	0,71	8,0	–15,8	8,0	32,7	54,8	42,5
500,0	1333	2500	0,71	0,71	1	40,9	8,2	–49,8	25,9	42,5	33,9

Дисперсии напряжений узлов $\sigma^2(U) = (19,9; 54,8; 33,9)$. Соответствующие им стандартные отклонения $\sigma(U) = (4,46; 7,4; 5,82)$. Принимая правило 2σ , можно сказать, что напряжение второго узла меняется в пределах $200 \pm 14,8$ кВ.

Пример 5.4. Для электрической сети (пример 5.3) и полученных статистических характеристик выполнить расчет суммарных по сети потерь энергии. Расчет выполняется согласно описанным выше процедурам на основе упрощенного выражения (5.36), где $\Delta P_{\Sigma}(M\bar{U})$ – потери мощности, соответствующие режиму математических ожиданий нагрузок; $(\sum_{i,j} Z_{ij} K P_{ij}) / (2U_B^2)$ – дисперсионная составляющая; T – временной интервал.

Для оценки погрешности применяемой процедуры был выполнен расчет установившихся режимов всех четырех интервалов неизменного состава мощностей узлов. Поинтервальные мощности,

напряжения и суммарные потери представлены в табл. 5.5. Итоговые суточные потери энергии составляют $\Delta\mathcal{E} = 133,6$ МВт·ч.

Таблица 5.5

Точный расчет потерь энергии

Период	t	P_1	P_2	P_3	U_1	U_2	U_3	Π	$\Pi \Delta t$
0–8	8	50	20	$\overline{200}$	206,1	207,0	210,2	7,57	60,57
8–12	4	80	20	$\overline{200}$	204,7	205,5	208,8	6,08	24,32
12–16	4	80	20	$\overline{100}$	199,9	199,7	202,0	1,03	4,10
16–24	8	80	100	$\overline{100}$	195,7	189,7	196,8	5,58	44,61
								Итого	133,6

Суммарные потери мощности (энергии) в электрической сети можно определить, суммируя потери в отдельных линейных элементах, вычисленные по средним напряжениям узлов $\Delta\mathcal{E}_\Sigma = T \sum_\ell R_\ell I_\ell^2$.

$$\Delta\mathcal{E}_{\Sigma 1} = 24(10 \cdot 0,154^2 + 5 \cdot 0,561^2 + 25 \cdot 0,06^2 + 25 \cdot 0,1726^2) = 63,36 \text{ МВт} \cdot \text{ч}.$$

Другой, более простой, подход заключается в определении суммарной мощности балансирующего узла (произведение строки Y_6 на вектор напряжений U и на U_6) и вычитании из нее суммы мощностей узлов. Вычисленные таким образом потери мощности в режиме МО составляют 2,65 МВт, а соответствующие суточные потери $\Delta\mathcal{E} = 2,65 \cdot 24 = 63,6$ МВт·ч, что почти вдвое меньше действительных потерь. Потери мощности с учетом дисперсионной составляющей по формуле (5.20) составляют $M(\pi_\Sigma) = 2,65 + 2,877 = 5,535$ МВт, а соответствующие потери энергии $\Delta\mathcal{E} = 5,535 \cdot 24 = 132,8$ МВт·ч, то есть погрешность метода составляет 0,56 % (это не означает, что и в других расчетах она будет такой же малой), но, безусловно, говорит об эффективности метода учета дисперсионной составляющей.

Упрощенный расчет дисперсионной составляющей потерь энергии, где не используется матрица корреляционных моментов напряжений, определяется согласно (5.36). Расчеты приведены в табл. 5.6, где $Z = Y^{-1}$ – матрица узловых сопротивлений, $B = Z/U_6^2$; $Z \otimes B$ – поэлементное произведение матриц. Из последней матрицы определяется сумма всех ее элементов. В результате дисперсионная составляющая результирующих потерь энергии $\Delta\mathcal{E}_{\Sigma 2} = -(-3) \cdot 24 = 72$ МВт·ч.

Суммарные результирующие потери энергии $\Delta A_{\Sigma} = \Delta A_{\Sigma 1} + \Delta A_{\Sigma 2} = 63,6 + 72 = 135,36$ МВт·ч. Это почти совпадает с полученными выше результатами (133,6 МВт·ч). Погрешность метода составляет $(135,36 / 133,6 - 1) \cdot 100 \% = 1,32 \%$. Разница определяется системой допущений и ограничений, принятых в сопоставляемых моделях.

Таблица 5.6

Дисперсионная составляющая

Z			cov(P)			$(Z/(2U_B^2)) \otimes \text{cov}(P)$			
-10	-10	-10	200,0	266,7	500,0	-0,05	-0,07	-0,13	
-10	-23,6	-12,3	266,7	1422	1333	-0,07	-0,84	-0,41	
-10	-12,3	-14,5	500,0	1333	2500	-0,13	-0,41	-0,91	
						Сумма элементов матрицы			-3

Таким образом, для определения потерь энергии через Z-матрицу нам пришлось выполнить единственный расчет установившегося режима. По трудоемкости этот расчет лишь немногим отличается от существующего метода максимального режима и времени максимальных потерь τ_{\max} . Однако легко рассчитать, что погрешность расчета по времени максимальных потерь значительно превышает погрешность проведенного расчета. Предлагаем читателям самостоятельно убедиться в этом, решая конкретные задачи.

Часть 2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ

6. СХЕМЫ, ГРАФЫ, АЛГОРИТМЫ

Любая техническая схема может быть представлена в виде рисунка, состоящего из точек (вершин), представляющих основные элементы объекта, и линий (ребер), соединяющих определенные пары этих вершин и представляющих связи между ними. Такие рисунки известны под общим названием **граф**. Например, приведенная на рис. 6.1 схема электрических соединений подстанции при принятии определенных соглашений о том, что считать вершиной, а что связью, легко может быть представлена в виде графа.

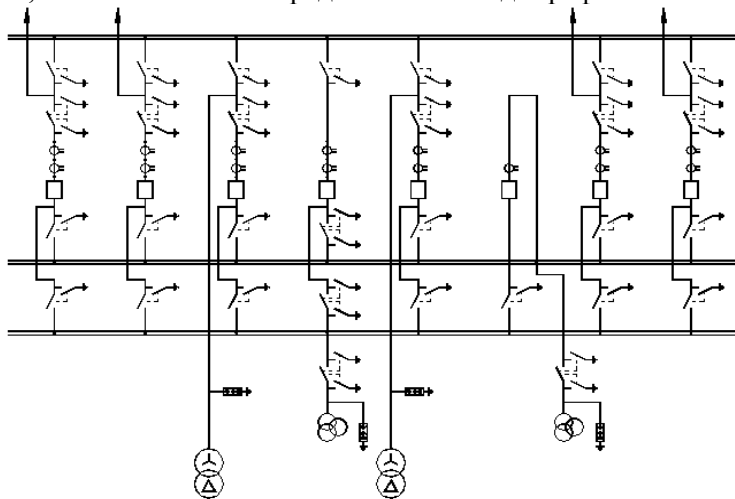


Рис. 6.1. Схема электрических соединений подстанции

Графы встречаются во многих областях под разными названиями: в гражданском строительстве это «структуры», в электротехнике – «сети», в социологии и экономике – «социограммы», в химии – «молекулярные структуры» и так далее.

Представление структур (схем) в виде графов позволяет применять к ним стандартные методы анализа, которые дают ответ на во-

просы, интересующие исследователя, проектировщика или практика, вне зависимости от того, какое смысловое содержание имеет исходный объект.

Благодаря своему широкому применению теория графов интенсивно развивается. В большой мере этому способствует прогресс в области развития вычислительной техники. Непосредственное и детальное представление практических систем, таких как высоковольтные и распределительные сети, схемы электрических соединений энергообъектов, приводит к графам большого размера, успешный анализ которых в первую очередь зависит от алгоритмов.

Считается, что эффективность алгоритмов имеет большее значение, чем быстродействие и ресурсы вычислительной техники. Поэтому в настоящем пособии основное внимание сосредоточено на описании алгоритмов анализа графов.

6.1. Основные понятия теории графов

6.1.1. Графы. Определение

Граф G задается множеством точек или вершин $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и множеством линий или ребер $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$, соединяющих между собой все эти точки или их часть. Таким образом, граф G полностью задается парой (X, A) .

Если ребра из множества A ориентированы, что обычно показывается стрелкой, то они называются дугами, а граф с такими ребрами называется ориентированным графом (рис. 6.2, а).

Если ребра не имеют ориентации, то граф называется неориентированным (рис. 6.2, б). В случае когда $G = (X, A)$ является ориентированным графом и мы хотим пренебречь направленностью дуг из множества A , то соответствующий G неориентированный граф будем обозначать как $\bar{G} = (X, A)^2$.

Если дуга обозначается упорядоченной парой, состоящей из начальной и конечной вершин (т. е. двух концевых вершин дуги), то ее направление предполагается заданным от первой вершины ко второй. Если x_1 и x_2 – концевые вершины дуги a , то говорят, что вершины x_1 и x_2 **инцидентны** дуге a . Данное определение относится и к дугам: все дуги или ребра графа, имеющие концевую вершину x , счи-

² Граф \bar{G} мы будем называть неориентированным дубликатом (или неориентированным двойником) графа G .

таются **инцидентными этой вершине**. Так, например, на рис. 6.2, *a* обозначение (x_1, x_2) относится к дуге a_1 , а (x_2, x_1) – к дуге a_2 .

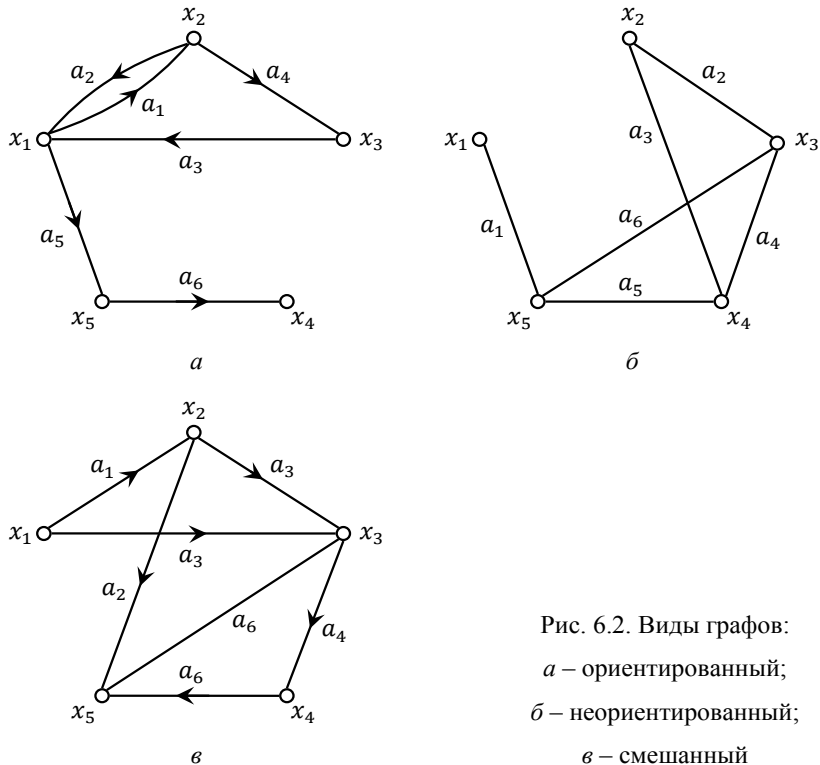


Рис. 6.2. Виды графов:
a – ориентированный;
б – неориентированный;
в – смешанный

Другое, употребляемое чаще, описание ориентированного графа G состоит в задании множества вершин X и соответствия Γ , которое показывает, как между собой связаны вершины. Граф в этом случае обозначается парой $G = (X, \Gamma)$.

Для ориентированного графа на рис. 6.2, *a* имеем $\Gamma(x_1) = \{x_2, x_5\}$, т. е. вершины x_2 и x_5 являются конечными вершинами дуг, у которых начальной вершиной является x_1 .

$$\begin{aligned}
 \Gamma(x_2) &= \{x_1, x_3\}, \\
 \Gamma(x_3) &= \{x_1\}, \\
 \Gamma(x_4) &= \emptyset - \text{пустое множество}, \\
 \Gamma(x_5) &= \{x_4\}.
 \end{aligned}$$

В случае неориентированного графа или графа, содержащего и дуги, и неориентированные ребра (например, графы, изображенные на рис. 6.2, б, в), предполагается, что соответствие Γ задает такой ориентированный эквивалентный граф, который получается из исходного графа заменой каждого неориентированного ребра двумя противоположно направленными дугами, соединяющими те же самые вершины. Так, например, для графа, приведенного на рис. 6.2, б, имеем $\Gamma(x_5) = \{x_1, x_3, x_4\}$, $\Gamma(x_1) = \{x_5\}$ и т. д.

Поскольку $\Gamma(x_i)$ представляет собой множество таких вершин $x_j \in X$, для которых в графе G существует дуга (x_i, x_j) , то через $\Gamma^{-1}(x_i)$ принято обозначать множество вершин x_k , для которых в G существует дуга (x_k, x_i) ($\Gamma^{-1}(x_i)$). Для графа, изображенного на рис. 1.2, а, имеем

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}(x_1) &= \{x_2, x_3\}, \\ \Gamma^{-1}(x_2) &= \{x_1\}\end{aligned}$$

и т. д.

Очевидно, что для неориентированного графа $\Gamma^{-1}(x_i) = \Gamma(x_i)$ для всех $x_i \in X$.

Когда соответствие Γ действует не на одну вершину, а на множество вершин $X_q = \{x_1, x_2, \dots, x_q\}$, то под $\Gamma(X_q)$ понимают объединение

$$\Gamma(X_q) = \Gamma(x_1) \cup \Gamma(x_2) \cup \dots \cup \Gamma(x_q),$$

т. е. $\Gamma(X_q)$ является множеством таких вершин $x_j \in X$, для которых существует дуга (x_i, x_j) в G , где $x_i \in X_q$. Для графа, приведенного на рис. 6.2, а, $\Gamma(\{x_2, x_5\}) = \{x_1, x_3, x_4\}$ и $\Gamma(\{x_1, x_3\}) = \{x_2, x_5, x_1\}$.

Отображение $\Gamma(\Gamma(x_i))$ записывается как $\Gamma^2(x_i)$ (внуки). Аналогично «тройное» отображение $\Gamma(\Gamma(\Gamma(x_i)))$ записывается как $\Gamma^3(x_i)$ (правнуки) и т. д. Для графа, показанного на рис. 6.2, а, имеем:

$$\Gamma^2(x_1) = \Gamma(\Gamma(x_1)) = \Gamma(\{x_2, x_3\}) = \{x_1, x_3, x_4\},$$

$$\Gamma^3(x_1) = \Gamma(\Gamma^2(x_1)) = \Gamma(\{x_1, x_3, x_4\}) = \{x_1, x_2, x_5\} \text{ и т. д.}$$

Аналогично понимаются обозначения $\Gamma^{-2}(x_i)$ (деды), $\Gamma^{-3}(x_i)$ (прадеды) и т. д.

6.1.2. Пути и маршруты

Путем (или ориентированным маршрутом) ориентированного графа называется последовательность дуг, в которой конечная вершина всякой дуги, отличной от последней, является начальной вершиной следующей.

Так, на рис. 6.3 последовательности дуг

$$a_6, a_5, a_9, a_8, a_4; \quad (6.1)$$

$$a_1, a_6, a_5, a_9; \quad (6.2)$$

$$a_1, a_6, a_5, a_9, a_{10}, a_6, a_4 \quad (6.3)$$

являются путями.

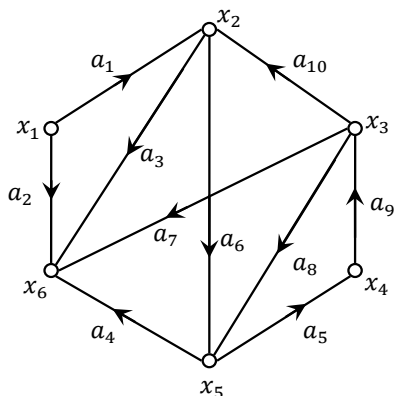


Рис. 6.3. Ориентированный граф

Дуги $a = (x_i, x_j)$, $x_i \neq x_j$, имеющие общие концевые вершины, называются **смежными**. Две вершины x_i и x_j называются смежными, если одна из дуг (x_i, x_j) и (x_j, x_i) или обе одновременно присутствуют в графе. Например, на рис. 6.3 дуги a_1, a_{10}, a_3 и a_6 , как и вершины x_5, x_3 , являются смежными, в то время как дуги a_1 и a_5 или вершины x_1 и x_5 не являются смежными.

Простой путь, или ориентированная цепь (орцепь), – это такой путь, в котором каждая дуга используется не больше одного раза. Так, например, приведенные выше пути (6.1) и (6.2) являются простыми путями, а путь (6.3) не является таким, поскольку дуга a_6 в нем используется дважды.

Элементарный путь (или простая орцепь) – это такой путь, в котором каждая вершина используется не более одного раза. Например, путь (6.2) является элементарным, а пути (6.1) и (6.3) – нет. Очевидно, что элементарный путь является также простым, но обратное утверждение неверно. Например, путь (6.1) является простым, но не

элементарным, путь (6.2) является простым и элементарным, а путь (6.3) не является ни простым, ни элементарным.

Маршрут – это неориентированный «двойник» пути. Это понятие рассматривается в тех случаях, когда можно пренебречь направленностью дуг в графе. Таким образом, маршрут – это последовательность ребер $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_q$, в которой каждое ребро \underline{a}_i , за исключением, возможно, первого и последнего, связано с ребрами \underline{a}_{i-1} и \underline{a}_{i+1} двумя концевыми вершинами. В графе, изображенном на рис. 6.3, последовательности дуг

$$\underline{a}_2, \underline{a}_4, \underline{a}_8, \underline{a}_{10}, \underline{a}_1; \quad (6.4)$$

$$\underline{a}_2, \underline{a}_7, \underline{a}_8, \underline{a}_4, \underline{a}_3; \quad (6.5)$$

$$\underline{a}_{10}, \underline{a}_7, \underline{a}_4, \underline{a}_8, \underline{a}_7, \underline{a}_2 \quad (6.6)$$

являются маршрутами (черта под символом дуги означает, что ее ориентацией пренебрегают, т. е. дуга рассматривается как неориентированное ребро).

Точно так же, как мы определили простые и элементарные пути, можно определить **цепи** (простой маршрут) и **простые цепи** (элементарный маршрут). Например, маршрут (6.4) есть цепь и простая цепь, маршрут (6.5) – цепь, но не простая цепь, а маршрут (6.6) не является ни цепью, ни простой цепью.

Путь или маршрут можно изображать также последовательностью вершин, что мы и будем использовать. Путь (6.1) можно представить последовательностью вершин $\{x_2, x_5, x_4, x_3, x_5, x_6\}$. Такое представление часто оказывается более полезным в тех случаях, когда осуществляется поиск элементарных путей или простых цепей.

6.1.3. Веса и длина пути

Иногда дугам графа G сопоставляются (приписываются) числа: дуге (x_i, x_j) ставится в соответствие некоторое число c_{ij} , называемое весом или длиной, или стоимостью (ценой) дуги. Тогда граф G называется графом с взвешенными дугами. Иногда веса (числа v_i) приписываются вершинам x_i графа, и тогда получается граф с взвешенными вершинами. Если в графе веса приписаны и дугам, и вершинам, то он называется взвешенным.

При рассмотрении пути μ , представленного последовательностью дуг (a_1, a_2, \dots, a_q) , за его вес (или длину, или стоимость) принимается число $\ell(\mu)$, равное сумме весов всех дуг, входящих в μ (каж-

дая дуга рассматривается столько раз, сколько она встречается дан-
ном пути.), т. е.

$$\ell(\mu) = \sum_{(x_i, x_j) \in \mu} c_{ij}.$$

Таким образом, когда слова «длина», «стоимость», «цена» и «вес» применяются к дугам, то они эквивалентны по содержанию, и в каждом конкретном случае выбирается такое слово, которое ближе подходит по смыслу и совпадает с принятой в решаемой задаче характеристикой дуги.

Мощностью (или длиной) пути μ называется число дуг, входящих в него.

6.1.4. Петли, ориентированные циклы и циклы

Петля – это дуга, начальная и конечная вершины которой совпадают. На рис. 6.4 дуги a_2 и a_5 являются петлями.

Замкнутый путь. Путь a_1, a_2, \dots, a_q называется замкнутым, если в нем начальная вершина дуги a_1 совпадает с конечной вершиной дуги a_q . Так, например, в графе, приведенном на рис. 6.4, последовательности дуг

$$a_3, a_6, a_{11}, \quad (6.7)$$

$$a_{11}, a_3, a_4, a_7, a_1, \quad (6.8)$$

$$a_3, a_4, a_7, a_{10}, a_9, a_{11} \quad (6.9)$$

являются замкнутыми путями.

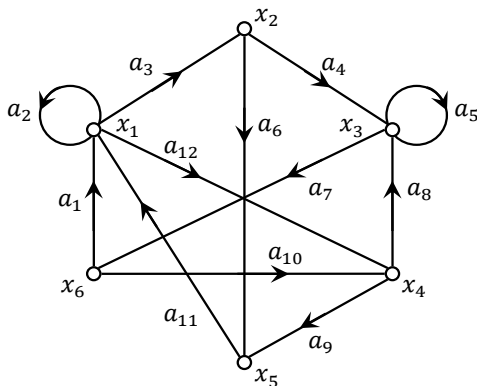


Рис. 6.4. Ориентированный граф с петлями

Замкнутая орцепь, или орцикл (простой замкнутый путь), – это такой замкнутый путь, в котором нет одинаковых дуг, но, вообще

говоря, могут «повторяться» внутренние вершины пути (а не только первая и последняя вершины).

Контур, или простой орцикл (элементарный замкнутый путь), – это такой замкнутый путь, в котором нет ни одинаковых дуг, ни одинаковых вершин (кроме первой и последней).

Пути (6.7) и (6.9) являются контурами, поскольку в них одна и та же вершина используется только один раз (за исключением начальной и конечной вершин, которые совпадают), а путь (6.8) не является контуром, так как вершина x_1 используется в нем дважды.

Контур, проходящий через все вершины графа, имеет особое значение и называется **гамильтоновым контуром**. Конечно, не все графы обладают гамильтоновыми контурами. Так, например, контур (6.9) является гамильтоновым контуром графа, приведенного на рис. 6.4, а граф на рис. 6.3 не имеет гамильтоновых контуров, поскольку не существует такой дуги, для которой x_1 была бы конечной вершиной.

Замкнутый маршрут является неориентированным двойником замкнутого пути. Таким образом, замкнутым маршрутом является x_1, x_2, \dots, x_q , поскольку в нем совпадают начальная и конечная вершины, т. е. $x_1 = x_q$.

На рис. 6.4 маршрут

$$\underline{a}_{10}, \underline{a}_1, \underline{a}_3, \underline{a}_4, \underline{a}_7, \underline{a}_1, \underline{a}_{12} \quad (6.10)$$

является замкнутым маршрутом, но не циклом, так как дуга \underline{a}_1 используется в нем дважды.

Цикл, или контур, – это замкнутая элементарная цепь, т. е. это замкнутая цепь, в которой нет ни одинаковых дуг, ни одинаковых вершин (кроме первой и последней). На рис. 1.4 маршрут

$$\underline{a}_3, \underline{a}_6, \underline{a}_9, \underline{a}_8, \underline{a}_7, \underline{a}_1 \quad (6.11)$$

является циклом, или контуром, к тому же и гамильтоновым циклом, так как проходит через все вершины графа.

6.1.5. Степени вершины

Число дуг, которые имеют вершину x_i своей начальной вершиной, называется **полустепенью исхода** вершины x_i . Число дуг, которые имеют x_i своей конечной вершиной, называется **полустепенью захода** вершины x_i .

Таким образом, на рис. 6.4 полустепень исхода вершины x_6 , обозначаемая как $d_0(x_6)$, равна $|\Gamma(x_6)| = 2$, и полустепень захода вершины x_6 , обозначаемая как $d_t(x_6)$, равна $|\Gamma^{-1}(x_6)| = 1$.

Совершенно очевидно, что сумма полустепеней захода всех вершин графа, а также сумма полустепеней исхода всех вершин равны общему числу дуг графа G , т. е.

$$\sum_{i=1}^n d_0(x_i) = \sum_{i=1}^n d_t(x_i) = m, \quad (6.12)$$

где n – число вершин и m – число дуг графа G .

Для неориентированного графа $G = (X, \Gamma)$ **степень вершины** x_i определяется аналогично – с помощью соотношения $d(x_i) \equiv |\Gamma(x_i)|$, и далее мы будем обозначать степень вершины x_i через d_i .

6.1.6. Подграфы

Остовный (частичный) подграф G_p графа $G = (X, A)$ – это граф (X, A_p) , для которого $A_p \in A$. Таким образом, остовный подграф имеет то же самое множество вершин, что и граф G , но множество дуг подграфа G_p является подмножеством множества дуг исходного графа.

Граф на рис. 6.5, б – остовный подграф G_p графа G , изображенного на рис. 6.5, а.

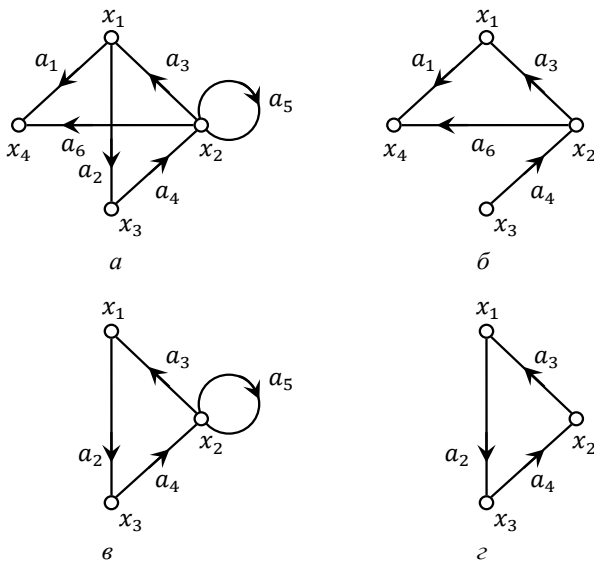


Рис. 6.5. Подграфы:
а – исходный граф; б – остовный подграф;
в – порожденный подграф; г – подграф

Порожденный подграф G_S графа $G = (X, \Gamma)$ – это граф (X_S, Γ_S) , для которого $X_S \subset X$ и для каждой вершины $x_i \in X_S$, $\Gamma_S(x_i) = \Gamma(x_i) \cap X_S$. Таким образом, порожденный подграф состоит из подмножества вершин X_S множества вершин исходного графа и всех таких дуг графа G , у которых конечные и начальные вершины принадлежат подмножеству X_S . Часто бывает удобно обозначать подграф G_S как $\langle X_S \rangle$.

На рис. 6.5, *в* показан порожденный подграф графа, приведенного на рис. 6.5, *а*, содержащий только вершины x_1, x_2 и x_3 и дуги, которые их связывают.

Соединяя приведенные выше два определения, можно сформулировать определение **подграфа** (частичный подграф): это граф, который содержит часть вершин и все связи между ними. Граф, показанный на рис. 6.5, *з*, является подграфом графа, приведенного на рис. 6.5, *а*.

Для графа, вершины которого представляют сотрудников некоторого учреждения, а дуги – линии связи между сотрудниками, граф, представляющий только наиболее важные каналы связи данного учреждения, является остовным подграфом. Граф, который подробно представляет линии связи только части этого учреждения (например, отделения), является порожденным подграфом, а граф, который представляет только важные связи в пределах отделения, является подграфом.

6.1.7. Типы графов

Граф $G = (X, A)$ называют **полным**, если для любой пары вершин x_i и x_j в X существует ребро (x_i, x_j) в $G = (X, A)$, т. е. для каждой пары вершин графа G должна существовать по крайней мере одна дуга, соединяющая их. Полный неориентированный граф, построенный на n вершинах, обозначается через K_n . Граф (X, A) называется **симметрическим**, если в множестве дуг A для любой дуги (x_i, x_j) существует также противоположно ориентированная дуга (x_j, x_i) .

Антисимметрическим графом (применяется также термин «направленный граф») называется такой граф, для которого справедливо следующее условие: если $(x_i, x_j) \in A$, то в множестве A нет противоположно ориентированной дуги, т. е. $(x_j, x_i) \notin A$. Очевидно, что в антисимметрическом графе нет петель.

На рис. 6.6, *а* показан симметрический граф, а на рис. 6.6, *б* – антисимметрический граф.

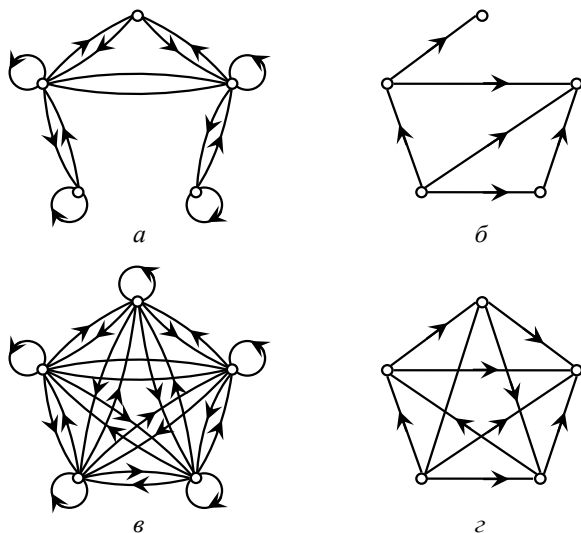


Рис. 6.6. Типы графов: *а* – симметрический; *б* – антисимметрический; *в* – полный симметрический; *г* – полный антисимметрический

Рассмотрим следующий пример: множество вершин графа представляет группу людей, дуга, направленная от вершины x_i к вершине x_j , означает, что x_i является другом или родственником x_j , тогда данный граф должен быть симметрическим. С другой стороны, если дуга, направленная от x_i к x_j , означает, что вершина x_j подчинена вершине x_i , то такой граф должен быть антисимметрическим.

Комбинируя приведенные выше определения, можно сформулировать понятия **полного симметрического графа** (пример такого графа – рис. 6.6, *в*) и **полного антисимметрического графа** (один из таких графов показан на рис. 6.6, *г*). Граф последнего типа часто называют **турниром**.

Неориентированный граф $G = (X, A)$ называют **двудольным**, если множество его вершин X может быть разбито на такие два подмножества X^a и X^b , что каждое ребро имеет один конец в X^a , а другой – в X^b . Ориентированный граф G называется двудольным, если его неориентированный двойник \bar{G} – двудольный граф. Легко доказать следующее утверждение.

Теорема 6.1. Неориентированный граф G является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечетной длины.

Доказательство. *Необходимость.* Поскольку X разбивается на две части X^a и X^b , то

$$X^a \cup X^b = X \text{ и } X^a \cap X^b = \emptyset. \quad (6.13)$$

Пусть существует цикл нечетной длины $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iq}, x_{i1}$, и, без потери общности, допустим, что $x_{i1} \in X^a$. Поскольку (согласно определению) одна из двух следующих друг за другом вершин этого цикла должна принадлежать X^a , а другая – X^b , то имеем $x_{i2} \in X^b$, $x_{i3} \in X^a$ и т. д. Следовательно, $x_{ik} \in X^a$, если k – нечетное, и $x_{ik} \in X^b$, если k – четное. Мы предположили, что длина цикла нечетная. Поэтому из соотношения $x_{iq} \in X^a$ следует, что $x_{i1} \in X^b$. Это противоречит (6.13), поскольку $X^a \cap X^b = \emptyset$ и вершина не может принадлежать одновременно X^a и X^b .

Достаточность. Предположим, что в графе G не существует цикла нечетной длины. Выберем одну из вершин, например x_i , и помечим ее плюсом «+». Выполним следующую итерационную процедуру.

Берем уже помеченную вершину x_i и помечаем все вершины из множества $\Gamma(x_i)$ знаком, противоположным присвоенному вершине x_i .

Будем продолжать эту операцию до тех пор, пока:

- 1) или все вершины не будут помечены, а знаки, приписанные им, согласованы (иными словами, любые две вершины, соединенные ребром, помечены противоположными знаками);
- 2) или некоторая вершина, например x_{ik} , которая была уже помечена каким-то знаком («+» или «-»), может быть помечена теперь (со стороны другой вершины) знаком, противоположным приписанному вершине x_{ik} ;
- 3) или для каждой помеченной вершины x_i все вершины из множества $\Gamma(x_i)$ уже помечены, но существуют другие, еще не помеченные вершины.

В случае (1) все вершины, помеченные знаком «+», отнесем к множеству X^a , а помеченные знаком «-» – к множеству X^b . Поскольку все ребра соединяют вершины, помеченные противоположными знаками, то граф является двудольным.

В случае (2) вершина x_{ik} должна быть помечена знаком «+» на некотором маршруте (например, μ_1), состоящем из вершин $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ik}$, причем знаки «+» и «-», приписываемые этим вершинам при движении по маршруту μ_1 (от вершины x_{i1} к вершине x_{ik}), должны образовывать

чередующуюся последовательность (вида « $+$, $-$, $+$, ...» или « $-$, $+$, $-$, ...»). Знаком « $-$ » вершина x_{ik} помечается вдоль некоторого маршрута μ_2 . Пусть x^* – предпоследняя (последней является x_{ik}) общая вершина маршрутов μ_1 и μ_2 . Если вершина x^* помечена знаком « $+$ », то участок от x^* до x_{ik} маршрута μ_1 должен быть четным, а участок от x^* до x_{ik} маршрута μ_2 должен быть нечетным. Если же вершина x^* помечена знаком « $-$ », то участок маршрута μ_1 будет нечетным, а маршрута μ_2 – четным. Следовательно, цикл, состоящий из участка маршрута μ_1 от x^* до x_{ik} и соответствующего участка маршрута μ_2 от x_{ik} до x^* , имеет нечетную длину. Это противоречит предположению, что граф G не содержит циклов нечетной длины, и значит, случай (2) невозможен.

Случай (3) означает, что между помеченной и не помеченной вершинами не существует ребра, т. е. что граф G распадается на две или больше частей и каждая из них может тогда рассматриваться отдельно. Итак, в конце концов, приходим к случаю (1). Теорема доказана.

Если нужно подчеркнуть, что граф является двудольным, то для графа применяют обозначение $(X^a \cup X^b, A)$, подразумевая, что выполняются также соотношения (6.13).

Двудольный граф $G = (X^a \cup X^b, A)$ называют **полным**, если для любых двух вершин $x_i \in X^a$ и $x_j \in X^b$ существует ребро (x_i, x_j) в $\underline{G} = (X, \underline{A})$. Если $|X^a|$ – число вершин множества $X^a = r$ и $|X^b| = s$, то полный неориентированный двудольный граф $G = (X^a \cup X^b, A)$ обозначается через $K_{r,s}$.

Граф $G = (X, A)$ называется **планарным**, если он может быть нарисован на плоскости (или сфере) таким образом, что две произвольные дуги графа не пересекаются друг с другом. На рис. 6.7, *а* показан полный граф K_5 , а на рис. 6.7, *б* – полный двудольный граф $K_{3,3}$, которые являются **непланарными** [1; 2]. Эти два графа играют важную роль в теории планарных графов и известны как графы Куратовского.

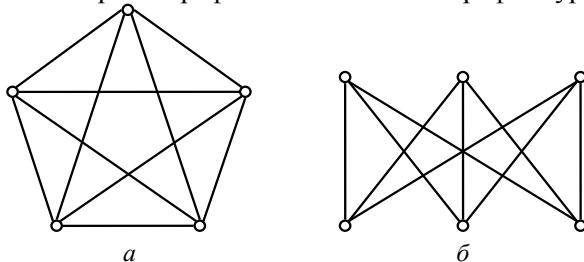


Рис. 6.7. Непланарные графы Куратовского

6.1.8. Сильно связанные графы и компоненты графа

Ориентированный граф называется **сильно связным**, или **сильным**, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь, соединяющий x_i с x_j . Это означает, что любые две вершины такого графа взаимно достижимы.

Ориентированный граф называется **односторонне связным**, или **односторонним**, если для любых двух различных вершин x_i и x_j существует по крайней мере один путь из x_i в x_j или из x_j в x_i (или оба одновременно).

Ориентированный граф называют **слабо связным**, или **слабым**, если для любых двух различных вершин графа существует по крайней мере один маршрут, соединяющий их.

Если для некоторой пары вершин орграфа не существует маршрута, соединяющего их, то такой орграф называется **несвязным** [3].

Граф, приведенный на рис. 6.8, *а*, как легко проверить, сильно связный. Граф, показанный на рис. 6.8, *б*, не является сильным (так как в нем нет пути из x_1 в x_3), но односторонне связный.

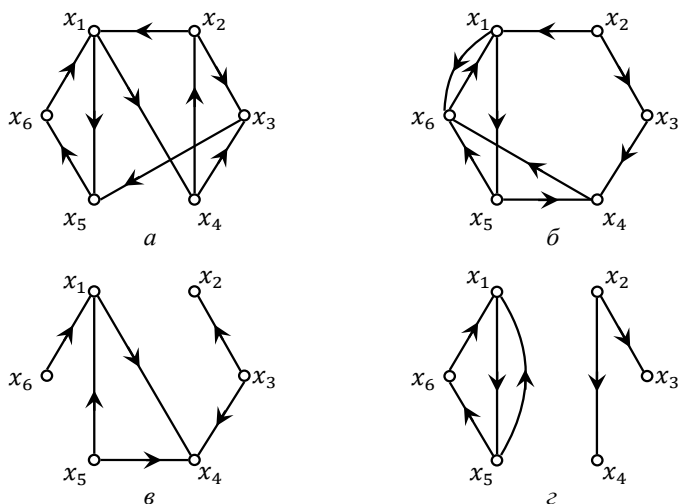


Рис. 6.8. Граф: *а* – сильно связный; *б* – односторонне связный; *в* – слабо связный; *г* – несвязный

Граф, изображенный на рис. 6.8, *в*, не является ни сильным, ни односторонним, поскольку в нем не существует путей от x_2 к x_5 и от

x_5 к x_2 . Он слабо связный. Наконец, граф, приведенный на рис. 6.8, з, является несвязным.

Пусть дано некоторое свойство P , которым могут обладать графы. Максимальным подграфом графа G относительно свойства P называется порожденный подграф $\langle \bar{X}_S \rangle$ графа G , обладающий этим свойством и такой, что не существует другого порожденного подграфа $\langle \bar{X}_S \rangle$, у которого $X_S \supset \bar{X}_S$ и который также обладает свойством P . Так, например, если в качестве свойства P взята сильная связность, то **максимальным сильным** подграфом графа G является сильный подграф, который не содержится в любом другом сильном подграфе. Такой подграф называется **сильной компонентой графа G** . Аналогично, односторонняя компонента представляет собой **односторонний максимальный подграф**, а слабая компонента — **максимальный слабый подграф**.

Например, подграф $\langle \{x_1, x_4, x_5, x_6\} \rangle$ является сильной компонентой графа G , приведенного на рис. 6.8, б. С другой стороны, подграфы $\langle \{x_1, x_6\} \rangle$ и $\langle \{x_1, x_5, x_6\} \rangle$ не являются сильными компонентами (хотя и являются сильными подграфами), поскольку они содержатся в графе $\langle \{x_1, x_4, x_5, x_6\} \rangle$ и, следовательно, не максимальные. В графе, показанном на рис. 6.8, в, подграф $\langle \{x_1, x_4, x_5\} \rangle$ является односторонней компонентой. В графе, приведенном на рис. 6.8, з, оба подграфа $\langle \{x_1, x_5, x_6\} \rangle$ и $\langle \{x_2, x_3, x_4\} \rangle$ являются слабыми компонентами, и у этого графа только две такие компоненты.

Из определений сразу же следует, что односторонние компоненты графа могут иметь общие вершины. Сильная компонента должна содержаться по крайней мере в одной односторонней компоненте, а односторонняя компонента содержится в некоторой слабой компоненте данного графа G .

6.1.9. Матричные представления

Для алгебраического задания графов удобно использовать следующие матрицы.

Матрица смежности

Пусть дан граф G , его матрица смежности обозначается как $A = [a_{ij}]$ и определяется следующим образом:

$a_{ij} = 1$, если в G существует дуга (x_i, x_j) ,

$a_{ij} = k$, если в G существует k дуг (x_i, x_j) ,

$a_{ij} = 0$, если в G нет дуги (x_i, x_j) .

Таким образом, матрица смежности графа, изображенного на рис. 6.9, имеет вид:

$$A = \begin{array}{c|cccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline x_1 & 0 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ x_3 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & \mathbf{2} & \mathbf{1} & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ x_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Матрица смежности полностью определяет структуру графа. Например, сумма всех элементов строки x_i матрицы дает полустепень исхода вершины x_i , а сумма элементов столбца x_i – полустепень захода вершины x_i . Множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i , есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, которые имеют 1 в столбце x_i , совпадает с множеством $\Gamma^{-1}(x_i)$.

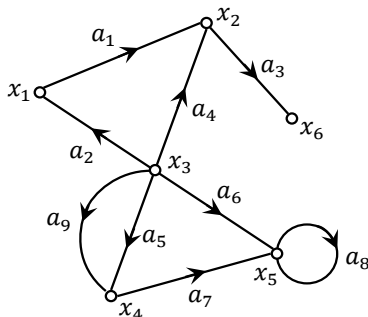


Рис. 6.9. Граф для построения матриц смежности и инцидентий

Возведем матрицу смежности в квадрат. Пусть элемент $a_{ik}^{(2)}$ матрицы A^2 определяется по формуле

$$a_{ik}^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{ij} a_{jk}. \quad (6.14)$$

Слагаемое в уравнении (6.14) равно 1 тогда и только тогда, когда оба числа a_{ij} и a_{jk} равны 1, в противном случае оно равно 0.

Поскольку из равенств $a_{ij} = a_{jk} = 1$ следует существование пути длины 2 из вершины x_i к вершине x_k , проходящего через вершину x_j , то $a_{ik}^{(2)}$ равно числу путей длины 2, идущих из x_i в x_k .

Аналогично, если $a_{ik}^{(p)}$ является элементом матрицы A^p , то $a_{ik}^{(p)}$ равно числу путей (не обязательно простых или элементарных) длины p , идущих от x_i к x_k .

Матрица инциденций

Рассмотрим граф G с n вершинами и m дугами. Матрица инциденций обозначается как $B = [b_{ij}]$ и является матрицей размерности $n \times m$, определяемой следующим образом:

$b_{ij} = 1$, если x_i является начальной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij} = -1$, если x_i является конечной вершиной дуги a_j ,

$b_{ij} = 0$, если x_i не является концевой вершиной дуги a_j или если a_i является петлей.

Для графа, приведенного на рис. 6.9, матрица инциденций имеет вид:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
x_1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0
x_2	-1	0	1	-1	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	1	1	0	0	1
x_4	0	0	0	0	-1		1	0	-1
x_5	0	0	0	0	0	-1	-1	0	0
x_6	0	0	-1	0	0	0	0	0	0

Поскольку каждая дуга инцидентна двум различным вершинам, за исключением того случая, когда дуга образует петлю, то каждый столбец либо содержит один элемент, равный 1, и один, равный -1, либо все элементы столбца равны 0. Если G является неориентированным графом, то его матрица инциденций определяется так же, как и выше, за исключением того, что все элементы, равные -1, заменяются на +1.

6.2. Хранение информации о схемах

6.2.1. Соотнесение исследуемого объекта и графа

Первое, что необходимо сделать, для того чтобы применить теорию графов к исследуемому объекту, – это принять соглашение о том, какие элементы исходного объекта считать вершиной, а какие ребром. Решение этого вопроса и детализация понятий «вершина – ребро» в сильной степени зависит от задачи, которую требуется решить.

На рис. 6.10, *а* приведен фрагмент схемы электроэнергетической системы (ЭЭС). Для расчета режима ЭЭС ее схема может быть преобразована в граф, если вершинами считать узлы ЭЭС (подстанции или электростанция), а ребрами – ЛЭП, которые связывают между собой эти узлы. Результат такого преобразования представлен на рис. 6.10, *б*.

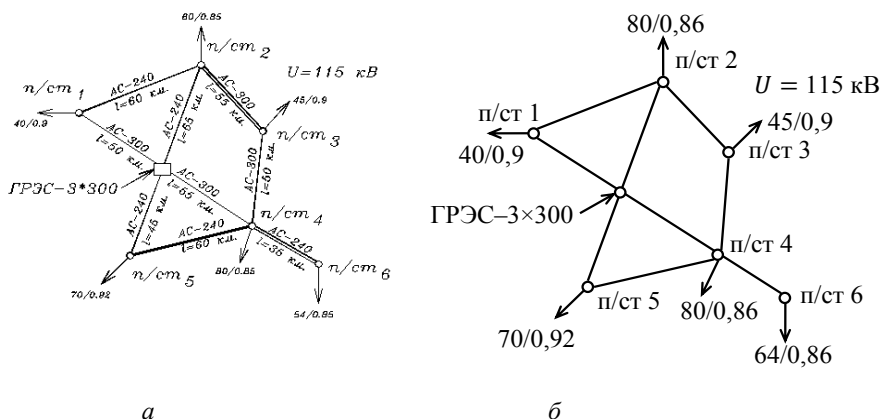


Рис. 6.10. Фрагмент схемы ЭЭС (*а*); граф схемы ЭЭС (*б*)

В другой задаче, например при анализе надежности схемы электрических соединений энергообъекта, удобнее ребром считать коммутационную аппаратуру, а присоединения (ЛЭП и силовые трансформаторы) и токоведущие части – узлами.

На рис. 6.11, *а* приведена схема электрических соединений $п/ст 1$ этой же ЭЭС (типовая схема 110-5ан – мостик с выключателями в цепях трансформаторов и ремонтной перемычкой со стороны трансформаторов), а на рис. 6.11, *б* – граф этой схемы для принятых соглашений о вершинах и ребрах. Связь между x_{11} и x_{12} показана пунктирной линией, это означает, что разъединитель QD_9 в нормальном состоянии отключен.

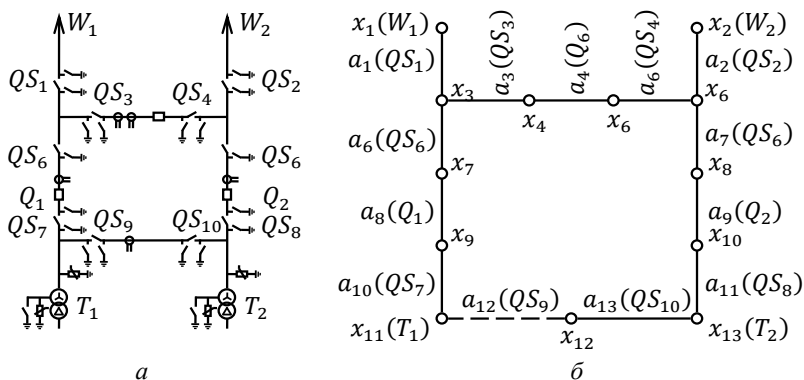


Рис. 6.11. Схема 110-5ан (а). Граф схемы 110-5ан (б)

Итак, в первом случае (рис. 6.10) ЛЭП – ребро, а для рис. 6.11 ЛЭП – вершина. Достаточно часто понятия вершины и ребра могут меняться местами, и более того, внутри этих понятий могут происходить изменения. Например, если требуется произвести анализ последствий аварийных ситуаций в схеме электрических соединений подстанции, то логично оставить в графе схемы только значимые ребра и вершины. Значимым ребром в нашем случае является силовой выключатель Q – только он способен осуществлять отключение коротких замыканий (КЗ), а значимыми вершинами – присоединения (ЛЭП W_1 и W_2 , силовые трансформаторы T_1 и T_2) – их рабочее состояние интересует нас в первую очередь. Следовательно, граф может быть сжат («сконденсирован») относительно значимых узлов и ребер. Также нет смысла учитывать существующие ребра, находящиеся в отключенном состоянии. Результат такого сжатия приведен на рис. 6.12.

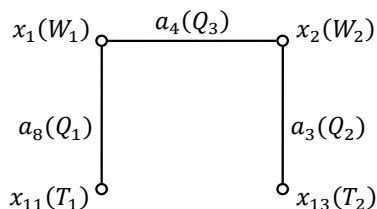


Рис. 6.12. Сконденсированный граф схемы 110-5ан

6.2.2. Хранение информации о графе. Связные списки

Для большинства практических задач необходимо, но недостаточно иметь информацию о структуре графа. Действительно, если речь идет о расчете режима ЭЭС, то для узлов и связей необходимо хранить и их характеристики. Например, класс напряжения узла, мощность нагрузки/генерации в узле, сопротивление связи и т. п. Для анализа надежности схемы электрических соединений важно иметь информацию о типе коммутационного аппарата, его состоянии (включен, отключен) и т. п.

Описанные в пп. 6.1.9 способы алгебраического задания графов не позволяют в явном виде хранить характеристики вершин и ребер и, кроме того, обладают следующими основными недостатками:

- **Слабое заполнение матриц.** Для хранения информации о структуре графа G с n вершинами и m ребрами в виде квадратной матрицы смежности требуется хранить $n \times n$ элементов. Число значимых элементов в такой матрице равно $2 \times m$. Для большинства структур в энергетике $m \approx n$ (число ребер/связей m сопоставимо по величине с числом вершин/узлов n). Для ЭЭС с $n = 1000$ и $m = 1500$ требуется хранить 10^6 элементов, из них значимых только 3000. Процент заполнения для такой структуры определяется выражением

$$\eta = \frac{2m}{n^2} \cdot 100 \%, \quad (6.15)$$

и в нашем случае $\eta = 0,3 \%$, т. е. 99,7 % памяти будет использоваться для хранения нулей.

- **Сложности при изменении размерности.** В большинстве задач требуется изменение размерности матрицы смежности, добавление, удаление или «шунтирование» связей. Эти операции, с учетом первого отмеченного недостатка, требуют неоправданно больших затрат памяти.
- **Отсутствие прямого доступа к структуре.** Как отмечалось в пп. 6.1.9, множество столбцов, имеющих 1 в строке x_i матрицы смежности A , есть множество $\Gamma(x_i)$, а множество строк, значение которых равняется -1 , есть множество $\Gamma^{-1}(x_i)$. Тем не менее для поиска значимых связей требуется просмотр всей строки. В случае ЭЭС с $n = 1000$ и $m = 1500$ требуется просмотреть все 1000 элементов строки x_i для того, чтобы найти одну или несколько значимых связей.

Все вышесказанное позволяет сформулировать требования к форме хранения информации о структуре объекта:

- *компактность* (минимум расхода памяти для хранения информации, хранение только «значимой» информации);
- *возможность добавления и удаления новых связей*;
- *прямой доступ к связям узлов* (без «перемалывания» нулей);
- *возможность хранения произвольного количества характеристик узлов и связей*.

Удовлетворить все эти требования одновременно невозможно.

Наиболее компактным способом хранения информации о структуре, позволяющим в то же время хранить произвольное количество характеристик узлов и ветвей, является хранение двух таблиц, таблицы N – список узлов и таблицы L – список ветвей.

Таблица $N = [n_{ik}]$ имеет размерность $n \times r$, где n – число узлов, r – число характеристик узла, необходимое для описания его свойств в поставленной задаче. Если требуется хранить только структуру, то $r = 1$. Таким образом, строка i таблицы N содержит характеристики узла x_i , первым элементом которой логично хранить имя узла x_i .

Таблица $L = [\ell_{jf}]$ имеет размерность $m \times s$, где m – число ветвей, s – число характеристик ветви, необходимое для хранения информации о структуре и описания ее свойств в поставленной задаче. Если требуется хранить только структуру графа, то $s = 2$. Таким образом, строка j таблицы L содержит характеристики ветви ℓ_j , первым элементом которой логично хранить имя начального узла x_i ветви ℓ_j , а вторым элементом – имя конечного узла x_j ветви ℓ_j .

При условии, что для узла мы храним только его имя и основную характеристику, а для ветви – имена начальных и конечных узлов, состояние связи (0 – отключена, 1 – включена) и тип связи, таблицы N и L для графа упрощенной (без разъединителей) схемы электрических соединений подстанции (рис. 6.13) могут выглядеть следующим образом:

$N =$	Имя узла	Характеристика узла
	W_1	ВЛ, АС-95
	W_2	ВЛ, АС-120
	W_3	ВЛ, АС-95
	W_4	ВЛ, АС-120
	A_1	Секц. 1, АС-185
	A_2	Секц. 2, АС-185
	T_1	ТМН-2500/35-У1
	T_1	ТМН-2500/35-У1

	Начальный узел	Конечный узел	Обозна- чения	Состояние связи	Тип
$L =$	W_1	A_1	Q_1	1	С-35М-630-10БУ1
	W_2	A_1	Q_2	1	С-35М-630-10БУ1
	W_3	A_2	Q_3	1	С-35М-630-10БУ1
	W_4	A_2	Q_4	1	С-35М-630-10БУ1
	T_1	A_1	Q_5	1	С-35М-630-10БУ1
	T_2	A_2	Q_6	1	С-35М-630-10БУ1
	A_1	A_2	Q_7	1	С-35М-630-10БУ1

Для обеспечения прямого доступа к связям узла чаще всего используется структура под названием **связный список**.

Для графа G с n вершинами, m ребрами, p характеристиками узлов и r характеристиками связей связный список состоит из двух таблиц – N^S и L^S .

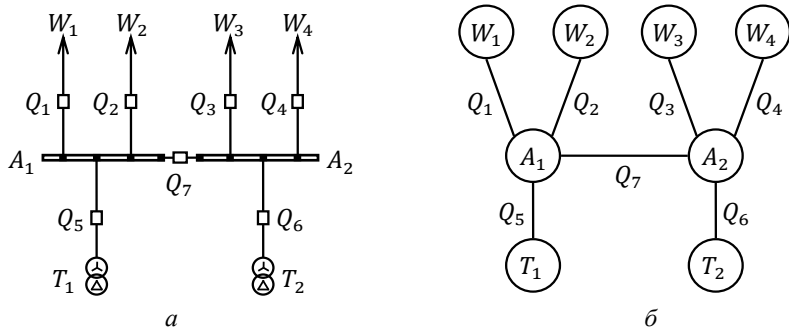


Рис. 6.13: а – схема 35–9 электрических соединений подстанции (разъединители не показаны); б – граф схемы 35–9

Таблица $N^S = [n_{ik}^S]$, $i = 1, \dots, n$; $k = 1, \dots, 2+r$ – список узлов имеет размерность $n \times (2+r)$, где n – число узлов, r – число характеристик узла, необходимое для описания его свойств в поставленной задаче. Если требуется хранить только структуру, то $k = 2$.

n_{i1}^s – закреплено для хранения обозначения узла;

n_{i2}^s – закреплено для хранения номера строки в таблице L^s , начиная с которой хранится описание связей узла;

$n_{i3...2+r}^s$ – предназначено для хранения характеристик узла.

Таблица $L^s = [\ell_{jt}^s]$, $j = 1, \dots, 2 \times m$, $t = 1, \dots, 2 + r$ – список связей узла имеет размерность $m \times (2 + r)$, где m – число ветвей, s – число характеристик ветви, необходимое для описания ее свойств в поставленной задаче. Если требуется хранить только структуру, то число столбцов равно 2.

ℓ_{j1}^s – закреплено для хранения имени узла;

ℓ_{j2}^s – строка продолжения, предназначена для хранения номера строки в таблице L^s , в которой хранится описание другой связи узла. $\ell_{j2}^s = 0$, если все связи узла уже описаны;

$\ell_{i3...2+r}^s$ – предназначено для хранения характеристик связи.

Для графа, изображенного на рис. 6.13, связный список, построенный на основе списка ветвей L , выглядит следующим образом:

$N_s =$	Имя узла	Номер строки в L^s	Характеристика узла	$L^s =$	Узел	Номер строки прод.	Обозн.	Сост. связи	Тип
	W_1	1	ВЛ, АС-95	→	A_1	0	Q_1	1	C-35M
	W_2	2	ВЛ, АС-120	→	A_1	0	Q_2	1	C-35M
	W_3	3	ВЛ, АС-95	→	A_2	0	Q_3	1	C-35M
	W_4	4	ВЛ, АС-120	→	A_2	0	Q_4	1	C-35M
	A_1	5	Секц.1, АС-185	→	W_1	6	Q_1	1	C-35M
	A_2	9	Секц.2, АС-185	→	W_2	7	Q_2	1	C-35M
	T_1	13	ТМН-2500/35-У1	→	T_1	8	Q_5	1	C-35M
	T_1	14	ТМН-2500/35-У1	→	A_2	0	Q_7	1	C-35M
				→	W_2	10	Q_3	1	C-35M
				→	W_3	11	Q_4	1	C-35M
				→	T_2	12	Q_6	1	C-35M
				→	A_1	0	Q_7	1	C-35M
				→	A_1	0	Q_5	1	C-35M
				→	A_2	0	Q_6	1	C-35M

Для хранения структуры графа (без характеристик узлов и ветвей) требуется $2n$ элементов в таблице N^s и $4m$ элементов в таблице L^s , что всего в шесть раз (для реальных графов электрических схем и сетей) превышает значимое число элементов, равное $2m$. Для сравнения, в матрице смежности число элементов превышает значимое примерно в 300–400 раз. При этом хранение структуры графа в виде связного списка позволяет осуществить *прямой доступ* к информации о связях узла, то есть

получить $\Gamma(x_i)$ без «перемалывания нулей». Например, чтобы получить $\Gamma(W_1)$, обращаемся к таблице N^S и находим, что описание связей узла W_1 начинается в строке №1 таблицы L^S . Из элемента $\ell_{1,1}^S$ извлекаем связь узла W_1 , $\Gamma(W_1) = \{A_1\}$. Затем в элементе $\ell_{1,2}^S$ обнаруживаем, что все связи узла W_1 уже просмотрены. Итак, $\Gamma(W_1) = \{A_1\}$. Для узла A_1 в таблице N^S и находим, что описание связей узла A_1 начинается в строке № 5 таблицы L^S . Из элемента $\ell_{5,1}^S$ извлекаем связь узла A_1 , $\Gamma(A_1) = \{W_1\}$. Затем в элементе $\ell_{5,2}^S$ обнаруживаем, что следующая связь описана в строке №6 таблицы L^S . Из элемента $\ell_{6,1}^S$ извлекаем следующую связь узла A_1 , $\Gamma(A_1) = \{W_1, W_2\}$ и так до тех пор, пока все связи узла A_1 не будут просмотрены. В результате $\Gamma(A_1) = \{W_1, W_2, T_1, A_2\}$.

Расположение связей узла x_i в таблице L^S совсем не обязательно должно следовать друг за другом, так как ссылка на строку продолжения указывает точный адрес следующей связи и поэтому может располагаться где угодно.

Кроме того, хранение информации о структуре позволяет свободно добавлять связи (для этого достаточно найти окончание описания связей узла, в строку продолжения вместо «нуля» записать номер первой свободной строки и в эту строку записать новую связь), удалять связи и хранить произвольное количество характеристик об узлах и связях.

Связные списки практически полностью удовлетворяют всем требованиям, которые мы сформулировали для форм хранения информации о структуре объекта.

6.2.3. Алгоритм заполнения связного списка

Как уже отмечалось в пп. 6.2.2, таблица L – список ветвей – является наиболее компактной формой однозначного задания структуры графа, и поэтому она наиболее часто используется для ввода исходной информации. Пусть для графа, изображенного на рис. 6.14, задана таблица $L [m, 3]$.

Данная таблица однозначно описывает граф, так как, анализируя ее содержимое, можно построить и список узлов, и матрицу смежности.

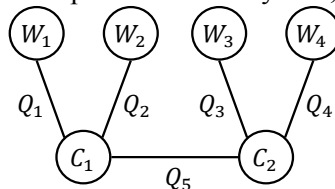


Рис. 6.14. Граф схемы подстанции

Для построения связного списка необходимо выполнить следующие действия.

Присвоение начальных значений

Шаг 1. Число узлов $NU = 0$. Номер анализируемой ветви $i = 0$ ($i = 1, \dots, m$). Таблица $N^S [NU - 0, 2] = 0$.

Построение списка узлов графа (таблицы N^S).

Шаг 2. Присвоить $i = i + 1$.

Если $i > m \rightarrow$ перейти к построению списка ветвей \rightarrow все ветви просмотрены, список узлов построен.

В противном случае

Шаг 3. Присвоить $k = 0$.

Шаг 4. Присвоить $k = k + 1$.

Если $k > 2 \rightarrow$ перейти к шагу 2.

В противном случае присвоить $TU = L[i, k]$ – имя анализируемого узла, инцидентного рассматриваемой ветви.

Просмотр уже построенного списка узлов

Шаг 5. Присвоить $j = 0$.

Шаг 6. Присвоить $j = j + 1$.

Если $j > NU$ и $NU > 0 \rightarrow$ перейти к шагу 4.

В противном случае:

Шаг 7. Если $NU > 0$ и $TU = N^S[j] \rightarrow$ вернуться к шагу 6.

В противном случае: $NU = NU + 1$ (появился новый узел).

Добавить один элемент к таблице N^S .

$N^S = [NU, 1] = TU$ – записать имя нового узла.

$N^S = [NU, 1] = 0$.

Перейти к шагу 4.

Построение связного списка связей графа (таблицы L^S)

Присвоение начальных значений

Шаг 1. Число узлов $n = NU$. Номер строки текущего узла (узел, связи которого анализируются) $i = 0$ ($i = 1, \dots, n$). Число ветвей m . Таблица $L^S[2m, 3] = 0$. $NSS = 1$ (номер первой свободной строки в таблице L), $TS = NSS$ (текущая строка, в которую записывается информация о связях текущего узла).

Заполнение ссылок на свободные строки

В общем случае свободные строки в списке связей таблицы L^S не обязательно располагаются по порядку. Например, при удалении какой-либо ветви из графа освобождается строка в списке ветвей. Чтобы иметь возможность записать в нее информацию, на нее необходимо сослаться. Поэтому любая свободная строка (за исключением последней) должна ссылаться на следующую свободную строку. Логично в качестве начального присвоения (так как первая свободная строка имеет номер 1) заполнить вектор последовательными ссылками (первая на вторую, вторая на третью и т. д.), а в последнюю строку поставить 0 – признак того, что дальше ни одной свободной строки нет.

Шаг 2. В цикле $j = 1, \dots, 2m - 1$ присвоить $L^S[j, 2] = j + 1$, а элементу $L^S[2m, 2] = 0$.

Шаг 3. $i = i + 1$. Если $i > n \rightarrow$ закончить работу (связный список построен).

В противном случае $TU = L^S[i, 1]$ (TU – текущий узел).

Просмотр всех связей текущего узла

Шаг 4. Просмотр списка ветвей L и поиск связей текущего узла i . Присвоить $j = 0$, $PS = 0$ (предыдущая строка).

Шаг 5. Присвоить $j = j + 1$.

Если $j > t \rightarrow$ вернуться к шагу 3 (анализ связей узла закончен).

В противном случае:

Поиск ветви, содержащей текущий (TU) узел и инцидентный ему (IU).

Шаг 6. Если $L^S[j, 1] = TU \rightarrow$ присвоить $IU = L^S[j, 2]$.

Или:

Если $L^S[j, 2] = TU \rightarrow$ присвоить $IU = L^S[j, 1]$.

$SOST = L^S[j, 3]$ (состояние связи).

В противном случае вернуться к шагу 5.

Заполнение текущей строки в списке связей

Шаг 7. $NSS = L^S[TS, 3]$,

$L^S[TS, 2] = SOST$,

$L^S[TS, 3] = 0$.

Если $PS \neq 0 \rightarrow$ присвоить $L^S[PS, 3] = TS$.

В противном случае \rightarrow присвоить $N^S[i, 2] = TS$.

Шаг 8. $PS = TS$,
 $TS = NSS$.
 Вернуться к шагу 5.

Результат:

$N^S =$	Имя узла	Номер строки в L^S	$L^S =$	Узел	Номер строки продолжения	Состояние связи
	W_1	1		C_1	0	1
	W_2	2		C_1	0	1
	W_3	3		C_2	0	1
	W_4	4		C_2	0	1
	C_1	5		W_1	6	1
	C_2	8		W_2	7	1
					C_2	0
			W_3	10	1	
			W_4	11	1	
			C_1	12	1	

Несложно заметить, что приведенный алгоритм легко позволяет заполнять произвольное количество характеристик связи. Если другие характеристики (кроме состояния) заданы в исходной таблице L , для заполнения их достаточно извлекать их из L^S на шаге 6 и записывать их в L^S на шаге 7.

6.3. Достижимость и связность

6.3.1. Введение

Практически любая задача анализа схем электрических соединений или схем ЭЭС требует проверки связности введенного графа. Решение этой задачи требуется и для контроля введенной информации, и для оценки текущего состояния объекта.

Необходимость задачи проверки связности наглядно можно показать на примере схемы ЭЭС (рис. 6.10). Предположим, что на п/ст 4 существует схема «одна секционированная выключателем система сборных шин» (рис. 6.13) и по какой-либо причине на этой подстанции произошло отключение секционного выключателя Q_7 . Результатом этого будет разбиение графа схемы на две несвязные части, узел п/ст 4 перестанет существовать как единое целое, а схема ЭЭС претерпит существенные изменения в структуре, что, безусловно, ска-

жется на режиме ее работы. Результат отключения Q_7 представлен на рис. 6.15.

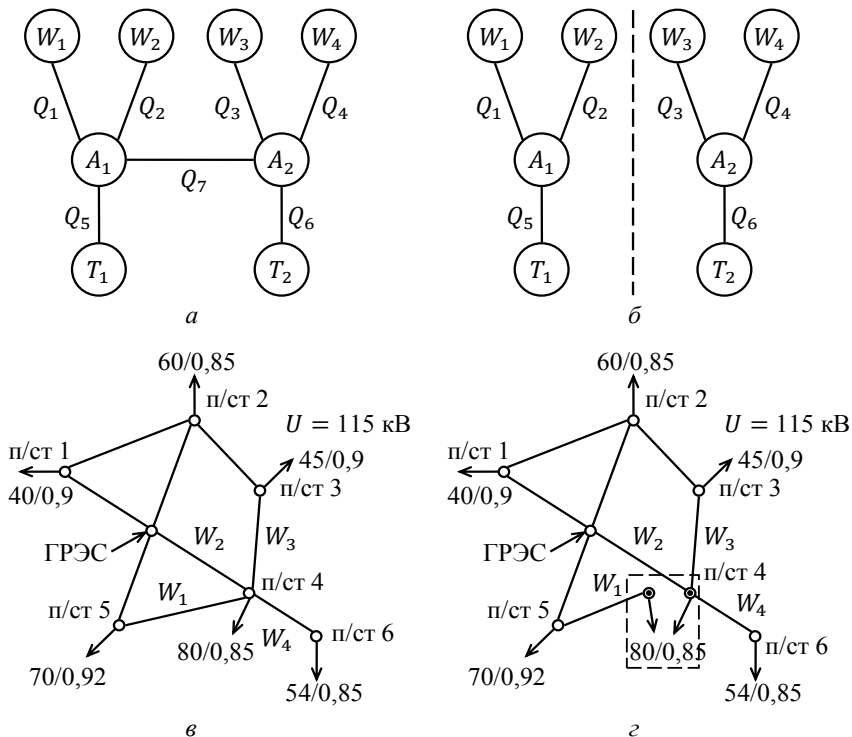


Рис. 6.15. Граф схемы: *а* – п/ст 4 при включенном секционном выключателе; *б* – п/ст 4 при отключенном секционном выключателе; *в* – ЭСС при включенном секционном выключателе на п/ст 4; *г* – ЭСС при отключенном секционном выключателе на п/ст 4

Почти всегда нам недостаточно знать ответ на вопрос – связный граф или нет. Чаще всего нам интересно, сколько групп связанных графов имеется и какие узлы принадлежат какой группе. Для рис. 6.15, *б* мы имеем две группы связности $X = X^a \cup X^b$ и $X^a \cap X^b = \emptyset$, где $X^a = \{W_1, W_2, A_1, T_1\}$, а $X^b = \{W_3, W_4, A_2, T_2\}$.

6.3.2. Матрицы достижимостей и контрадостижимостей

Матрица достижимостей $R = [r_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_j \text{ достижима из } x_i, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Множество вершин $R(x_i)$ графа G , достижимых из заданной вершины x_i , состоит из таких элементов x_j , для которых элемент ij в матрице достижимостей равен 1. Очевидно, что все диагональные элементы в матрице R равны 1, поскольку каждая вершина достижима из себя самой с помощью пути длиной 0.

Поскольку $\Gamma(x_i)$ является множеством таких вершин x_j , которые достижимы из x_i с использованием путей длины 1, т. е. $\Gamma(x_i)$ – такое множество вершин, для которых в графе существуют дуги (x_i, x_j) , и поскольку $\Gamma(x_i)$ является множеством вершин, достижимых из x_j с помощью путей длины 1, то множество $\Gamma(\Gamma(x_i)) = \Gamma^2(x_i)$ состоит из вершин, достижимых из x_i с использованием путей длины 2. Аналогично $\Gamma^p(x_i)$ является множеством вершин, которые достижимы из x_i с помощью путей длины p .

Так как любая вершина графа G , которая достижима из x_i , должна быть достижима с использованием пути (или путей) длины 0, или 1, или 2, ... , или p (с некоторым конечным, но, возможно, достаточно большим значением p), то множество вершин, достижимых из x_i , можно представить в виде

$$R(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma(x_i) \cup \Gamma^2(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^p(x_i). \quad (6.16)$$

Таким образом, множество $R(x_i)$ может быть получено последовательным выполнением (слева направо) операций объединения в соотношении (1.16) до тех пор, пока «текущее» множество не перестанет увеличиваться по размеру при очередной операции объединения. С этого момента последующие операции не будут давать новых членов множеству, и таким образом будет образовано достижимое множество $R(x_i)$. Число объединений, которое нужно выполнить, зависит от графа, но очевидно, что число p меньше числа вершин в графе.

Матрицу достижимостей можно построить так. Находим достижимые множества $R(x_i)$ для всех вершин $x_i \in X$ способом, приведенным выше. Положим, $r_{ij} = 1$, если $x_j \in R(x_i)$, и $r_{ij} = 0$ – в противном случае. Полученная таким образом матрица R является матрицей достижимостей.

Матрица контрадостижимостей $Q = [q_{ij}]$ определяется следующим образом:

$$q_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } x_i \text{ достижима из } x_j, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Контрадостижимым множеством $Q(x_i)$ графа G является множество таких вершин, что из любой вершины этого множества можно достичь вершины x_i . Аналогично построению достижимого множества $R(x_i)$ на основе соотношения (6.16) можно сформировать множество $Q(x_i)$, используя следующее выражение:

$$Q(x_i) = \{x_i\} \cup \Gamma^{-1}(x_i) \cup \Gamma^{-2}(x_i) \cup \dots \cup \Gamma^{-p}(x_i), \quad (6.17)$$

где $\Gamma^{-2}(x_i) = \Gamma^{-1}(\Gamma^{-1}(x_i))$ и т. д.

Операции выполняются слева направо до тех пор, пока очередная операция объединения не перестанет изменять «текущее» множество $Q(x_i)$.

Столбец x_i матрицы Q ($q_{ij} = 1$, если $x_j \in Q(x_i)$, и $q_{ij} = 0$ – в противном случае) совпадает со строкой x_i матрицы R , т. е. $Q = R^t$, где R^t – транспонированная матрица достижимостей R .

6.3.3. Нахождение сильных компонент

Сильная компонента (СК) графа G была определена в пп. 6.1.8 как максимальный, сильно связный подграф графа G . Поскольку в сильно связном графе произвольная вершина x_j достижима из любой другой вершины x_i , то в ориентированном графе существует одна и только одна СК, содержащая вершину x_i . В самом деле, если бы вершина x_i принадлежала двум или большему числу сильных компонент, то существовал бы путь из любой вершины одной СК в произвольную вершину другой СК, и следовательно, объединение этих сильных компонент было бы сильно связным графом, что противоречит определению СК.

Если вершина x_i одновременно является начальной и конечной вершиной пути, то множество вершин, существенных относительно этих двух идентичных концов (т. е. множество вершин некоторого цикла, содержащего x_i), совпадает с пересечением $R(x_i) \cap Q(x_i)$. Поскольку все эти существенные вершины достижимы из x_i и, кроме того, из каждой такой вершины достижима вершина x_i , то все они взаимно достижимы. Более того, если нет другой вершины, существенной относительно концов x_i и x_i , то множество $R(x_i) \cap Q(x_i)$, кото-

рое может быть построено с использованием соотношений (6.16) и (6.17), однозначно определяет СК графа G , содержащую вершину x_i .

Если эти вершины удалить из графа $G = (X, \Gamma)$, то в оставшемся порожденном подграфе $G' = \{X - R(x_i) \cap Q(x_i)\}$ можно таким же способом выделить новую СК, содержащую $x_i \in \{X - R(x_i) \cap Q(x_i)\}$. Эту процедуру можно повторять до тех пор, пока все вершины графа G не будут сгруппированы в соответствующие СК. После завершения этой процедуры граф G будет разбит на свои сильные компоненты.

Граф $G^* = (X^*, \Gamma^*)$ определяется так: каждая его вершина представляет множество вершин некоторой сильной компоненты³ графа G , дуга (x_i^*, x_j^*) существует в G^* тогда и только тогда, когда в G существует дуга (x_i, x_j) , такая, что x_i принадлежит компоненте, соответствующей вершине x_i^* , а x_j — компоненте, соответствующей вершине x_j^* . Граф G^* называют **конденсацией** графа G .

Совершенно очевидно, что конденсация G^* не содержит циклов, поскольку наличие цикла означает, что любые вершины этого цикла взаимно достижимы, а поэтому совокупность всех вершин цикла принадлежит некоторой СК в G^* и, следовательно, содержится в СК графа G , что противоречит определению конденсации, в силу которого вершины из G^* соответствуют СК в G .

6.3.4. Базы

База B графа — это множество вершин, из которого достижима любая вершина графа и которое является минимальным в том смысле, что не существует собственного подмножества в B , обладающего таким свойством достижимости. Если мы обозначим через $R(B)$ множество вершин, достижимых из вершин множества B

$$R(B) = \bigcup_{x_i \in B} R(x_i), \quad (6.18)$$

то B является базой тогда и только тогда, когда

$$R(B) = X \quad \text{и} \quad \forall S \subset B \quad R(S) \neq X. \quad (6.19)$$

Второе условие ($R(S) \neq X \quad \forall S \subset B$) в соотношении (6.19) эквивалентно утверждению: $x_j \notin R(x_i)$ для любых двух различных $x_i, x_j \in B$, т. е. вершина из B не достижима из любой другой вершины B . Эта эквивалентность может быть обоснована следующим образом.

³ Разным компонентам из G соответствуют разные вершины в графе G^* .

Поскольку для любых двух множеств H и $H \subseteq H'$ мы имеем, что $R(H) \subseteq R(H')$, то условие $(S) \neq X \ \forall S \subset B$ эквивалентно соотношению $R(B - \{x_j\}) \neq X$ для всех $x_j \in B$; другими словами, $R(x_j) \not\subset R(B - \{x_j\})$. Последнее условие может быть выполнено тогда и только тогда, когда $x_j \notin R(B - \{x_j\})$, т. е. тогда и только тогда, когда $x_j \notin R(x_i)$ для любых $x_i, x_j \in B$.

Итак, базой является такое множество B вершин графа G , которое удовлетворяет следующим двум условиям:

- каждая вершина графа G достижима хотя бы из одной вершины множества B ;
- в B нет вершины, которая достижима из другой вершины множества B .

Из этих двух условий мгновенно получаются следующие утверждения:

- (а) в множестве B нет двух вершин, которые принадлежат одной и той же СК графа G ;
- (б) в любом графе без циклов существует единственная база; она состоит из всех вершин графа, полустепени захода которых равны 0.

Доказательства этих двух утверждений простые и непосредственно следуют из определений.

Таким образом, в силу утверждений (а) и (б) база B^* конденсации G^* графа G состоит из таких вершин графа G^* , полустепени захода которых равны 0. Следовательно, базы графа G можно строить так: из каждой СК графа G , соответствующей вершине базы B^* конденсации G^* , надо взять по одной вершине, т. е. если $B^* = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$, где m – число вершин-множеств S_j в базе B^* графа G^* , то базой B является произвольное множество $\{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$, где $x_{ij} \in S_j$.

6.3.5. Алгоритм проверки связности графа

Как уже отмечалось в начале главы, задача проверки связности графа является основной при решении практически любых энергетических задач. Рассмотрим формальный алгоритм проверки связности графа на основе его связного списка.

Приведенный ниже алгоритм позволяет помимо проверки связности выделить группы связанных между собой узлов.

Рассмотрим граф $G = (X_n, A_m)$, где X_n – совокупность n узлов, A_m – совокупность m ветвей, заданный матрицами N^S (список узлов) и L^S (список связей (см. пп. 6.2.2)). Напомним, что $L^S[j, 1]$ – имя ко-

нечного узла связи, $L^s[j, 2]$ – номер строки продолжения связей начального узла, а $L^s[j, 3]$ – состояние связи.

Для успешной работы алгоритма введем вектор \vec{V} , размерность которого соответствует числу узлов n . Для графа (рис. 6.14), содержащего 6 узлов, вектор \vec{V} содержит 6 элементов, значение элемента i вектора предназначено для хранения группы связности узла i из матрицы N^s . Начальные значения элементов вектора – 0.

Присвоение начальных значений

Шаг 1. $V_i = 0$, $i = 1, \dots, n$. Номер текущего узла, пока он не задан, примем $i = 0$. Номер узла, с которым связан текущий узел, $j = 0$. Число групп связности $KGS = 0$. Номер текущей группы связности $TGS = 0$.

Построение групп связности графа

Шаг 2. Присвоить $i = i + 1$.

Если $i > n \rightarrow$ закончить работу.

Шаг 3. Если $\vec{V}[i] = 0 \rightarrow$ присвоить $KGS = KGS + 1$, $TGS = KGS$, $\vec{V}[i] = TGS$.

В противном случае $TGS = \vec{V}[i]$.

Шаг 4. $j = j + 1$. Если $j > n \rightarrow$ вернуться к шагу 2. Просмотреть все связи узла i . Для этого необходимо просмотреть все связи узла i в матрице строки матрицы смежности $j = 1, \dots, n$.

Шаг 5. Если $L^s[j, 3] = 1 \rightarrow$ перейти к шагу 6.

В противном случае \rightarrow перейти к шагу 4.

Шаг 6. Проверить значение $\vec{V}[j]$.

Если $\vec{V}[j] = 0 \rightarrow$ присвоить $\vec{V}[j] = TGS$ и вернуться к шагу 4.

В противном случае требуется перенумерация (сращивание) групп связности, имеющих разный номер, но на самом деле связанных между собой. $OGS = \vec{V}[j]$.

Шаг 6. Уменьшить число групп связности $KGS = KGS - 1$.

Выбрать наименьшее значение из TGS и OGS и присвоить (через промежуточную переменную) $TGS = \min(TGS, OGS)$, $OGS = \max(TGS, OGS)$.

Шаг 7. Для всех $\vec{V}[i] = OGS$ присвоить $\vec{V}[i] = TGS$ и вернуться к шагу 2.

После завершения работы алгоритма в переменной KGS содержится число групп связности, а вектор \vec{V} содержит информацию о принадлежности каждого узла той или иной группе. Так, для графа

рис. 6.14 (одна секционированная выключателем система сборных шин) при отключенном секционном выключателе Q_5 матрица смежности M и вектор групп связности \vec{V} после работы алгоритма выглядят следующим образом (количество групп связности – 2):

	W_1	W_2	W_3	W_4	C_1	C_2		W_1	W_2	W_3	W_4	C_1	C_2
$M =$	W_1		0	0	0	1	0	$\vec{V} =$	W_1	1			
	W_2	0		0	0	1	0		W_2	1			
	W_3	0	0		0	0	1		W_3	2			
	W_4	0	0	0		0	1		W_4	2			
	C_1	1	1	0	0		0		C_1	1			
	C_2	0	0	1	1	0			C_2	2			

6.4. Независимые и доминирующие множества

6.4.1. Независимые множества

Достаточно часто в электроэнергетике возникает необходимость поиска «ключевых» точек в энергосистеме, например размещение центров обслуживания и ремонта. Решение этой или подобных задач можно получить, опираясь на понятия независимых и доминирующих множеств.

Рассмотрим неориентированный граф $G = (X, \Gamma)$. **Независимое множество вершин** (известное также как внутренне устойчивое множество [32]) есть множество вершин графа G , такое, что любые две вершины в нем не смежны, т. е. никакая пара вершин не соединена ребром. Следовательно, любое множество $S \subset X$, которое удовлетворяет условию

$$S \cap \Gamma(S) = \emptyset, \quad (6.20)$$

является независимым множеством вершин. Например, для графа, приведенного на рис. 6.16, множества вершин $\{x_7, x_8, x_2\}$, $\{x_3, x_1\}$, $\{x_7, x_8, x_2, x_5\}$ – независимые. В случаях, когда это не приведет к недоразумениям, эти множества будут называться просто независимыми множествами (вместо «независимые множества вершин»).

Независимое множество называется **максимальным**, когда нет другого независимого множества, в которое оно бы входило. Таким образом, множество S является **максимальным независимым множеством**, если оно удовлетворяет условию (6.20), а также условию

$$H \cap \Gamma(H) = \emptyset \quad \forall H \supset S. \quad (6.21)$$

Следовательно, для графа, приведенного на рис. 6.16, множество $\{x_7, x_8, x_2, x_5\}$ является максимальным, а $\{x_7, x_8, x_2\}$ таковым не является. Множества $\{x_1, x_3, x_7\}$, $\{x_4, x_6\}$ также являются максимальными независимыми множествами, и значит, в графе может быть больше одного независимого множества. Следует также отметить, что число элементов (вершин) в разных максимальных множествах, как следует из приведенного выше примера, не обязательно одинаковое.

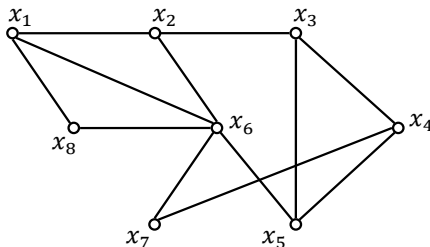


Рис. 6.16. Граф для иллюстрации понятия «максимальные независимые множества»

Если Q является семейством всех независимых множеств графа G , то число

$$\alpha[G] = \max_{S \in Q} |S| \quad (6.22)$$

называется **числом независимости** графа G , а множество S^* , на котором этот максимум достигается, называется **наибольшим независимым** множеством.

Для графа, приведенного на рис. 6.16, семейство максимальных независимых множеств таково:

$$\{x_8, x_7, x_2, x_5\}, \{x_1, x_3, x_7\}, \{x_2, x_4, x_8\}, \{x_6, x_4\}, \\ \{x_6, x_3\}, \{x_7, x_5, x_1\}, \{x_1, x_4\}, \{x_3, x_7, x_8\}.$$

Наибольшее из этих множеств имеет 4 элемента, и следовательно, $\alpha[G] = 4$. Множество $\{x_8, x_7, x_2, x_5\}$ является наибольшим независимым множеством.

6.4.2. Алгоритм построения всех максимальных независимых множеств

Обоснование алгоритма

Данный алгоритм основан на систематическом методе перебора Брона и Кэрбоша [34] и является существенно упрощенным перебором, использующим дерево поиска. В процессе поиска – на некотором этапе k – независимое множество вершин S_k расширяется путем добавления к нему подходящим образом выбранной вершины (чтобы получилось новое независимое множество S_{k+1}) на этапе $k + 1$, и так поступают до тех пор, пока добавление вершин станет невозможным, а порожденное множество не станет максимальным независимым множеством.

Пусть Q_k будет на этапе k наибольшим множеством вершин, для которого $S_k \cap Q_k = \emptyset$, т. е. после добавления любой вершины из Q_k к S_k получается независимое множество S_{k+1} . В некоторый произвольный момент работы алгоритма множество Q_k состоит из вершин двух типов: подмножества Q_k^- – тех вершин, которые уже использовались в процессе поиска для расширения множеств S_k , и подмножества Q_k^+ – таких вершин, которые еще не использовались. Тогда дальнейшее ветвление в дереве поиска включает процедуру выбора вершины $x_{ik} \in Q_k^+$, добавление ее к S_k для построения множества

$$S_{k+1} = S_k \cup \{x_{ik}\} \quad (6.23)$$

и порождение подмножеств:

$$Q_{k+1}^- = Q_k^- - \Gamma(x_{ik}) \quad (6.24)$$

и

$$Q_{k+1}^+ = Q_k^+ - (\Gamma(x_{ik}) \cup \{x_{ik}\}). \quad (6.25)$$

Шаг возвращения алгоритма состоит в удалении вершины x_{ik} из S_{k+1} , чтобы вернуться к S_k , в изъятии x_{ik} из старого множества Q_k^+ и добавлении к старому множеству Q_k^- для формирования новых множеств Q_k^+ и Q_k^- .

Нетрудно заметить, что множество S_k является максимальным независимым множеством только тогда, когда невозможно его дальнейшее расширение, т. е. когда $Q_k^+ = \emptyset$. Если $Q_k^- \neq \emptyset$, то заключаем, что текущее множество S_k было расширено на некотором предшествующем этапе работы алгоритма путем добавления вершины из Q_k^- , и поэтому оно не является максимальным независимым множеством. Таким образом, необходимым и достаточным условием того, что S_k –

максимальное независимое множество, является выполнение равенств

$$Q_k^- = Q_k^+ = \emptyset. \quad (6.26)$$

Совершенно очевидно, что если очередной этап работы алгоритма наступает тогда, когда существует некоторая вершина $x \in Q_k^-$, для которой $\Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset$, то безразлично, какая из вершин, принадлежащих Q_k^+ , используется для расширения S_k , и это справедливо при любом числе дальнейших ветвлений; вершина x не может быть удалена из Q_p^- на любом следующем шаге $p > k$. Таким образом, условие

$$\exists x \in Q_k^-, \text{ такая, что } \Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset, \quad (6.27)$$

является достаточным для осуществления шага возвращения, поскольку из S_k при всяком дальнейшем ветвлении уже не получится максимальное независимое множество.

Как и во всяком методе, использующем дерево поиска, здесь выгодно стремиться начать шаги возвращения как можно раньше. Следовательно, целесообразно сосредоточить усилия на том, чтобы добиться выполнения условия (6.27) с помощью подходящего выбора вершин, используемых при расширении множеств S_k . На каждом следующем шаге процедуры можно выбирать для добавления в S_k любую вершину $x_{ik} \in Q_k^+$; на шаге возвращения x_{ik} будет удалена из Q_k^+ и включена в Q_k^- . Если вершину x_k выбрать так, чтобы она принадлежала множеству $\Gamma(x)$ при некоторой вершине x из Q_k^- , то на соответствующем шаге возвращения вершина

$$\Delta(x) = |\Gamma(x) \cap Q_k^+| \quad (6.28)$$

уменьшится на единицу (по сравнению с тем значением, которое было до выполнения прямого шага и шага возвращения), так что условие (4.8) теперь станет выполняться раньше.

Таким образом, один из возможных способов выбора вершины x_{ik} для расширения S_k состоит, во-первых, в нахождении вершины $x^* \in Q_k^-$ с возможно меньшим значением величины $\Delta(x^*)$ и, кроме того, в выборе вершины x_{ik} из множества $\Gamma(x^*) \cap Q_k^+$. Такой выбор вершины x_{ik} будет приводить на шаге возвращения к уменьшению величины $\Delta(x^*)$ – каждый раз на единицу – до тех пор, пока вершина x^* не станет удовлетворять условию (6.27) при выполнении шага возвращения.

Поскольку на шаге возвращения вершина x_{ik} попадает в Q_k^- , то может оказаться, что при этом новом входе значение величины Δ меньше, чем ранее фиксированной вершины x^* . Значит надо проверить, не ускорит ли эта новая вершина выполнения условия (6.28). Это особенно важно в начале ветвления, когда $Q_k^- = \emptyset$.

Описание алгоритма

Присвоение начальных значений

Шаг 1. Пусть $S_0 = Q_0^- = \emptyset$, $Q_0^+ = X$, $k = 0$.

Прямой шаг

Шаг 2. Выбрать вершину x_{ik} , принадлежащую Q_k^+ , и сформировать S_{k+1} , Q_{k+1}^- и Q_{k+1}^+ , оставляя нетронутыми Q_k^- и Q_k^+ .
Присвоить $k = k + 1$.

Проверка

Шаг 3. Если удовлетворяется условие: $\forall x \in Q_k^-$, такая, что $\Gamma(x) \cap Q_k^+ = \emptyset$, то перейти к шагу 5, иначе – к шагу 4.

Шаг 4. Если $Q_k^- = Q_k^+ = \emptyset$, то напечатать или запомнить максимальное независимое множество S_k и перейти к шагу 5.

Если $Q_k^+ = \emptyset$, а $Q_k^- \neq \emptyset$, то перейти к шагу 5, иначе – к шагу 2.

Шаг возвращения

Шаг 5. Присвоить $k = k - 1$. Удалить x_{ik} из S_{k+1} , чтобы получить S_k .
Исправить Q_k^- и Q_k^+ , удалив вершину x_{ik} из Q_k^+ и добавив ее к Q_k^- . Если $k = 0$ и $Q_0^+ = \emptyset$, то закончить работу. Все множества уже построены. Иначе перейти к шагу 3.

6.4.3. Доминирующие множества

Для графа $G = (X, \Gamma)$ **доминирующее множество вершин** (называемое также внешне устойчивым множеством) есть множество вершин $S \subseteq X$, выбранное так, что для каждой вершины x_j , не входящей в S , существует дуга, идущая из некоторой вершины множества S в вершину x_j .

Таким образом, S – это доминирующее множество вершин (или просто доминирующее множество, когда нет опасности возникновения путаницы), если

$$\text{SUG}(S) = X. \quad (6.29)$$

Для графа, приведенного на рис. 6.17, множества вершин $\{x_1, x_4, x_6\}$, $\{x_1, x_4\}$, $\{x_3, x_5, x_6\}$ являются доминирующими множествами.

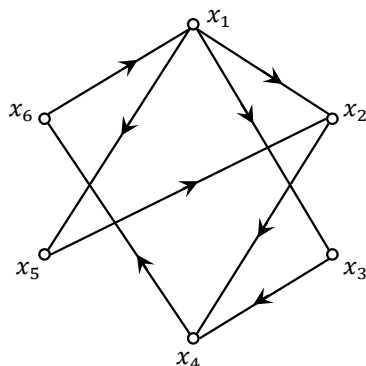


Рис. 6.17. Граф для иллюстрации понятия «доминирующие множества»

Доминирующее множество называется **минимальным**, если нет другого доминирующего множества, содержащегося в нем.

Таким образом, множество S является минимальным доминирующим множеством, если оно удовлетворяет соотношению (6.29) и нет собственного подмножества в S , которое удовлетворяет условию, аналогичному (6.29). Так, например, для графа, приведенного на рис. 6.17, множество $\{x_1, x_4\}$ – минимальное, а $\{x_1, x_4, x_6\}$ – нет. Минимальным доминирующим множеством является также множество $\{x_3, x_5, x_6\}$, и еще существует несколько таких множеств в этом графе. Следовательно, как и в случае максимальных независимых множеств, в графе может быть несколько минимальных доминирующих множеств, и они не обязательно содержат одинаковое число вершин.

Если P – семейство всех минимальных доминирующих множеств графа, то число

$$\beta[G] = \min_{S \in P} |S| \quad (6.30)$$

называется **числом доминирования** графа G , а множество S^* , на котором достигается минимум, называется **наименьшим доминирующим множеством**.

Для графа, приведенного на рис. 6.17, наименьшим доминирующим множеством является множество $\{x_1, x_4\}$, и следовательно, $\beta[G] = 2$.

6.5. Деревья

6.5.1. Введение

Понятие дерева является одним из наиболее важных понятий теории графов, которое часто встречается в различных задачах. Впервые понятие дерева было предложено Кирхгофом в связи с определением фундаментальных циклов, применяемых при анализе электрических цепей.

Можно дать несколько определений дерева:

- связный граф, содержащий n вершин и $n - 1$ ребро;
- связный граф, не имеющий циклов;
- граф, в котором каждая пара вершин соединена одной и только одной простой цепью.

Граф без циклов при наличии нескольких несвязных компонент называется **лес**.

На рис. 6.18 приведен пример графа и одного из его деревьев.

Число деревьев графа можно вычислить по формуле [1]:

$$N_{\text{дер}} = |B_0 \cdot B_0^t|, \quad (6.31)$$

где B_0 – матрица инцидентий с одной удаленной строкой (т. е. с $n - 1$ независимой строкой); B_0^t – транспонированная матрица инцидентий с одной удаленной строкой.

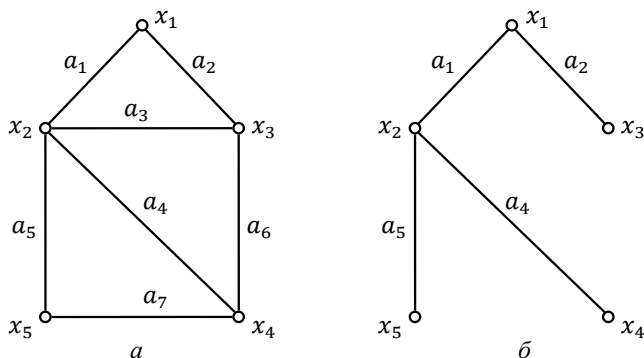


Рис. 6.18. Граф G (а). Дерево T_1 графа G (б)

В случае неориентированного графа для получения правильного результата всем ребрам в матрице инцидентий B необходимо придать произвольную ориентацию. То есть в каждом столбце матрицы инцидентий необходимо одну из вершин графа произвольно посчитать начальной вершиной дуги, а другую – конечной. В столбце, содержащем дугу, одна цифра должна равняться «1», а другая «-1».

6.5.2. Построение всех остовных деревьев

Во многих задачах возникает необходимость построения всех остовных деревьев графа G . Например, в том случае, когда нужно отобрать «лучшее» дерево, а критерий отбора трудно формализуется или является субъективным.

Элементарные преобразования деревьев

Рассмотрим два дерева $T_1 = (X, A_1)$ и $T_2 = (X, A_2)$ одного графа $G = (X, A)$. Расстояние между двумя деревьями обозначается как $d(T_1, T_2)$ и определяется как число дуг из T_1 , которых нет в T_2 . Если $d(T_1, T_2) = 1$, т. е. если $(A_1 \cup A_2) - (A_1 \cap A_2) = \{a_1, a_2\}$, где $a_1 \in A_1$ и $a_2 \in A_2$, то дерево T_2 можно получить из дерева T_1 , удалив из T_1 дугу a_1 и добавив дугу a_2 . Такое преобразование дерева T_1 в T_2 называется **элементарным преобразованием дерева**.

Описание метода построения деревьев графа

Первый шаг метода состоит в присвоении номеров ребрам. Ребра нумеруются от 1 до m , где m – число ребер в графе G . На каждом этапе (т. е. при каждом ветвлении в дереве решений) выбирается ребро, которое вместе с остальными, уже выбранными на предыдущих этапах, будет образовывать часть конструируемого дерева. Таким образом, прежде чем отобрать такое ребро, выясняют, действительно ли добавление его к частично сформированному дереву (которое на этом шаге является набором поддеревьев) не приводит к образованию цикла. Если цикл появляется, то данное ребро отбрасывается и проверке подвергается следующее ребро с большим номером. Если цикла нет, то ребро добавляется к другим, уже отобранным, и процесс продолжается до тех пор, пока не будет построено остовное дерево. Ребра перебираются в порядке возрастания их номеров, что приводит к исчерпывающему и без повторов способу решения задачи.

Для облегчения манипуляций с поддеревьями в каждом конкретном поддереве произвольным образом выделяют корень (некоторую вершину поддерева) и затем рассматривают поддерево уже как древовидность – дерево с направленными ребрами. Для организации проверки на возможность образования цикла (при добавлении ребра) каждую вершину x_j помечают парой (r_j, p_j) .

Первая пометка, r_j , указывает «корень» поддерева, содержащего вершину x_j . Первоначально $r_j = x_j$ для всех вершин x_j . На некотором шаге два поддерева T_1 и T_2 сращиваются посредством добавления ребра $a_\ell = (x_\alpha, x_\beta)$ с вершиной x_α из T_1 и вершиной x_β из T_2 . Если на этом шаге r_1 – «корневая» пометка вершин в T_1 , а r_2 – «корневая» пометка вершин в T_2 и, например, $r_1 < r_2$, то все вершины в T_2 должны «сменить» свои корневые пометки на r_1 . После этого два поддерева T_1 и T_2 «соьются» в одно дерево T_1 .

Вторая пометка p_j , приписанная вершине x_j , указывает вершину, предшествующую вершине x_j , то есть если (x_k, x_j) – дуга рассматриваемого поддерева, то $p_j = x_k$. Для корневой вершины дерева (поддерева) такая пометка принимается равной нулю. Первоначально $p_j = 0$ для всех вершин x_j .

А. Замена корня дерева. Если корнем дерева T является вершина r и нужно в качестве корня выбрать новую вершину x_s , то такую замену r на x_s можно осуществить простым обращением ориентации дуг, принадлежащих цепи, идущей от r к x_s , не меняя при этом ориентацию других дуг. Соответствующие изменения пометок будут таковы:

Изменения пометок «предшествования»

1. Пусть $x_j = x_s$ и $z = p_j$.
2. Присвоить $x_j = z$, а $z = p_i$.
3. Шаг обновления: $x_i = x_j$.
4. Если $x_j = r$, то перейти к шагу 5, в противном случае присвоить $x_j = x_i$ и перейти к шагу 2.
5. Присвоить $p_s = 0$. Стоп.

Изменения корневых пометок

1. Для всех вершин, имеющих корневую пометку r , заменить ее на пометку x_s .

Б. Сращивание двух поддеревьев.

Если осуществлено сращивание двух поддеревьев T_1 и T_2 (добавилось ребро $a_\ell = (x_\alpha, x_\beta)$ с вершиной x_α из T_1 и вершиной x_β из T_2), то необходимо в пометки внести следующие изменения:

- у вершин с корневой пометкой r_2 заменить ее на r_1 ;
- заменить в дереве T_2 корень r_2 на x_β (как было описано в пункте «Замена корня дерева»), после чего сменить пометку предшествования у вершины x_β с $p_\beta = 0$ на $p_\beta = x_\alpha$.

В. Расщепление дерева на две части.

Так как рассматриваемый метод порождения деревьев является поиском, использующим дерево решений, то возникает необходимость удаления некоторых ребер (на шагах возвращения), чтобы испытать затем другие ребра. В этом случае удаление ребра приводит к делению дерева на две части, например на T_1 и T_2 , и в пометки одного из этих поддеревьев должны быть внесены изменения. Пусть удаляется ребро $a_\ell = (x_\alpha, x_\beta)$ с вершиной x_α из T_1 и вершиной x_β из T_2 . Тогда при $p_\beta = x_\alpha$ (т. е. если ребро (x_α, x_β) в исходном дереве ориентировано от x_α к x_β) пометки в дереве T_1 можно оставить прежними, а пометки в дереве T_2 должны быть изменены:

1. Положить $S = \{x_\beta\}$ и $p_\beta = 0$ (x_β будет корнем дерева T_2).
2. Найти все вершины x_j с $p_\beta \in S$ и изменить их корневые пометки на $r_j = x_\beta$. Если таких вершин нет, остановиться.
3. Шаг обновления: $S = S \cup \{p_j \mid p_j \in S\}$. Вернуться к шагу 2.

Отметим, что ни у одной из вершин, кроме нового корня x_β , пометки предшествования менять не нужно.

Описание алгоритма построения деревьев

Возьмем произвольную вершину x^* графа G . Пусть ее степень равна d^* . Перенумеруем ребра, инцидентные этой вершине: a_1, a_2, \dots, a_{d^*} . Затем перенумеруем остальные ребра графа G : $a_{d^*+1}, a_{d^*+2}, \dots, a_m$. При порождении деревьев ребра будут перебираться в соответствии с введенной нумерацией.

Шаг 1. Присвоить вершинам пометки: (r_i, p_i) , где $r_i = x_i$ и $p_i = 0 \forall x_i \in X$. Присвоить $k = 1$.

Шаг 2. Выбрать для исследования некоторое ребро, например $a_k = (x_i, x_j)$. Если $k \leq m$ (где m – число ребер графа), то:

- если $r_i = r_j$, то это означает, что вершины x_i и x_j принадлежат к одному и тому же поддереву и добавление ребра a_k приведет к появлению цикла. Отбросить ребро a_k и вернуться к шагу 2;
- если $r_i \neq r_j$, то ребро a_k можно добавить к ребрам построенных поддеревьев. Перейти к шагу 3.

Если $k = m + 1$, т. е. если «неисследованных» ребер нет, то перейти к шагу 5.

Шаг 3. Срастить два поддерева, у которых вершины имеют корневые пометки r_i и r_j , применив для этого метод, описанный в пункте «Б. Сращивание двух поддеревьев».

Шаг 4. Если $k = n - 1$, то дерево построено. Запомнить его и перейти к шагу 5.

В противном случае присвоить $k = k + 1$ и вернуться к шагу 2.

Шаг 5. (Возвращение). Удалить ребро, добавленное последним. Предположим, что таким ребром является ребро a_ℓ . Если a_ℓ – единственное оставшееся для добавления ребро, $\ell = d^*$, то остановиться. Все деревья графа построены (при любом дальнейшем ветвлении дерева решений вершина x^* останется изолированной).

В противном случае необходимо обновить пометки, действуя так, как это описано в пункте «В. Расщепление дерева на две части». Присвоить $k = \ell + 1$ и вернуться к шагу 2.

Пример

Применение вышеописанного алгоритма для графа на рис. 6.18 позволяет построить все деревья. На рис. 6.19 приведено полное дерево поиска, а на рис. 6.20 – все деревья графа (рис. 6.18).

Легко рассчитать число деревьев в соответствии с выражением (6.31).

Будем считать, что каждое ребро ориентировано от вершины с меньшим индексом к вершине с большим индексом, тогда матрица инцидентий этого графа имеет вид:

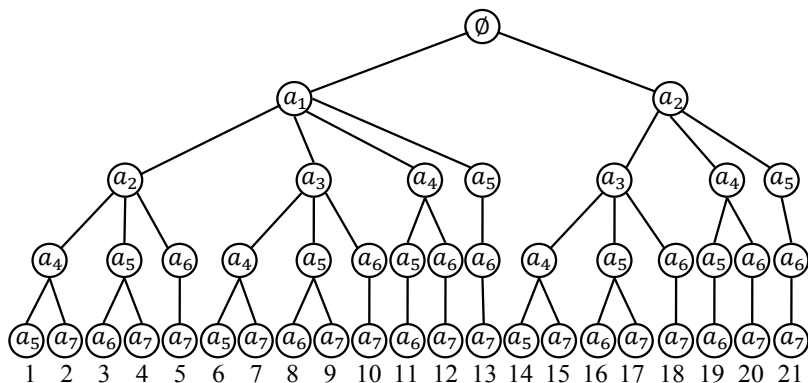
$$B = \begin{array}{c|cccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 \\ \hline x_1 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_2 & \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ x_4 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{-1} & 0 & \mathbf{-1} \end{array}$$


Рис. 6.19. Полное дерево поиска для графа на рис. 6.18

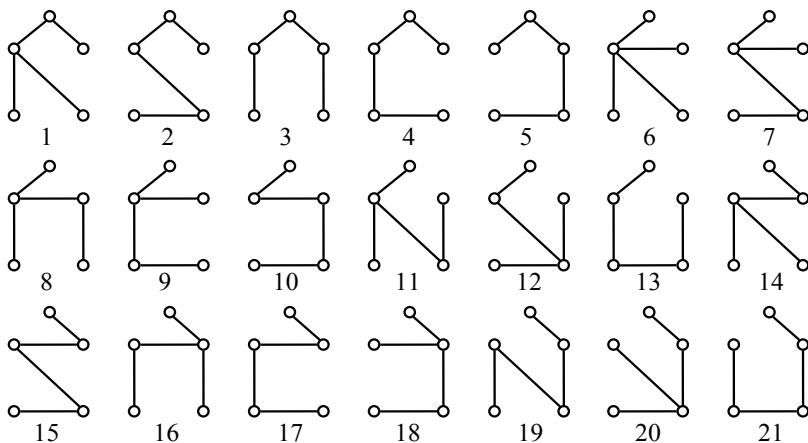


Рис. 6.19. Все деревья для графа на рис. 6.18

Удалив, например, строку x_2 , получим матрицу B_0 . Произведение матриц $B_0 \cdot B_0^t$ выглядит следующим образом:

$$B_0 \cdot B_0^t = \begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{array}$$

Определитель $|B_0 \cdot B_0^t| = 21$.

Таким образом, налицо совпадение результатов работы алгоритма и результата, полученного в соответствии с выражением (6.31).

6.6. Циклы, разрезы и задача Эйлера

6.6.1. Введение

Целью настоящей главы является изучение циклов в графах и исследование некоторых их свойств и связей с другими понятиями (например, дерева), введенными ранее. Два типа циклов в графах – эйлеровы и гамильтоновы – часто встречаются в практических задачах и поэтому представляют особый интерес.

В настоящей главе мы рассмотрим циклы как в ориентированных, так и в неориентированных графах, а также в мультиграфах, являющихся слабым обобщением понятия графа. Последние являются графами, в которых может существовать несколько дуг (x_i, x_j) между двумя данными вершинами x_i и x_j . Если наибольшее число «запараллеленных» дуг равно s , то граф называется s -графом. Так, на рис. 6.20 представлен 2-граф. Очевидно, что обычный граф можно рассматривать как 1-граф.

На практике s -графы очень часто возникают, когда граф используется для представления физической системы в естественных науках, вопросах управления, инженерном деле и т. д. В электротехнике графы, изображающие электрические цепи, почти всегда являются s -графами, так как параллельно может быть включено несколько электрических компонентов. В проблемах надежности оборудования или сетей связи наиболее важные устройства или линии связи часто дублируются, утраиваются и т. д., а возникающая избыточность увеличивает надежность системы. Графы таких систем также являются s -графами.

6.6.2. Цикломатическое число и фундаментальные циклы

Пусть G – неориентированный s -граф с n вершинами, m ребрами и p связными компонентами. Определим число $q(G)$ как

$$q(G) = n - p, \quad (6.32)$$

тогда $q(G)$ дает полное число ребер в остовах каждой из p связных компонент графа G .

Число $v(G)$ определяется как

$$v(G) = m - q(G) = m - n + p \quad (6.33)$$

и называется цикломатическим числом (иногда его называют также дефектом или первым числом Бетти), а число $q(G)$ называется коцикломатическим числом.

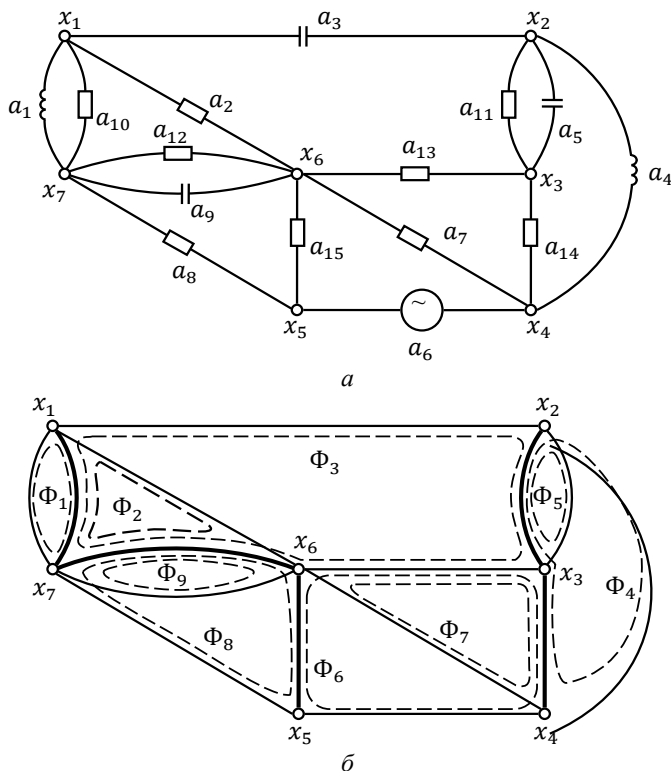


Рис. 6.20. Электрическая цепь (а); фундаментальные циклы (б)

В теории электрических цепей (и на самом деле при представлении любой системы с сосредоточенными параметрами) числа $q(G)$ и $v(G)$ имеют физический смысл. Так цикломатическое число равно наибольшему числу независимых контуров в графе электрической цепи, т. е. наибольшему числу независимых контурных токов, которые могут протекать в цепи. Коцикломатическое число равно наибольшему числу независимых узловых потенциалов в электрической цепи.

Рассмотрим, например, электрическую цепь, показанную на рис. 6.20, *а*. Неориентированный граф G этой цепи состоит из единственной связной компоненты ($p = 1$) и изображен на рис. 6.20, *б*, где остова T показан жирной линией.

Добавление любого ребра (x_i, x_j) из G , не принадлежащего T , к ребрам дерева T приводит к образованию точно одного (простого) цикла, состоящего из ребер остова T , лежащих на (единственной) цепи из x_j в x_i , и только что добавленного ребра. Например, добавляя ребро $a_3 = (x_1, x_{j2})$, получаем цикл $(x_1, x_7, x_6, x_3, x_2, x_1)$. Так как в графе G имеется T ребер, из которых $n - 1$ лежит в T , то число всех циклов, построенных таким способом, равно $n - m + 1$, что совпадает с цикломатическим числом графа G . В примере на рис. 6.21, *б* число таких циклов равно $15 - 7 + 1 = 9$, они изображены на рисунке пунктирными линиями и обозначены через $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9$. Все эти циклы, очевидно, независимы между собой, так как каждый из них имеет по крайней мере одно ребро, не принадлежащее никакому другому циклу. В общем случае $v(G)$ циклов, получаемых добавлением какого-либо ребра из G , не лежащего в T , к ребрам T , называются **фундаментальными циклами**. Если семейство этих циклов обозначить через Φ (в нашем примере $\Phi = \{\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_9\}$), то любой другой цикл в графе, не принадлежащий к Φ , может быть выражен в виде линейной комбинации циклов из Φ , если принять следующее соглашение.

Пусть каждый фундаментальный цикл $\Phi_i, i = 1, \dots, v(G)$, представлен m -мерным вектором, в котором компонента j равна 1 или 0 в зависимости от того, принадлежит ли ребро j данному циклу. Тогда, используя \oplus как символ сложения по модулю 2, любой цикл Φ_k можно представить как сумму по модулю 2 фундаментальных циклов. Так цикл $\Phi_{10} = (a_3, a_{11}, a_{14}, a_6, a_8, a_1)$ на рис. 6.21, *б* может быть представлен в виде

$$\begin{aligned}
\Phi_{10} &= \Phi_1 \oplus \Phi_3 \oplus \Phi_6 \oplus \Phi_8 = \\
&= (100000000100000) \oplus (001000000111100) \oplus \\
&\oplus (000001000000111) \oplus (000000010001001) = \\
&= (000000010001001).
\end{aligned}$$

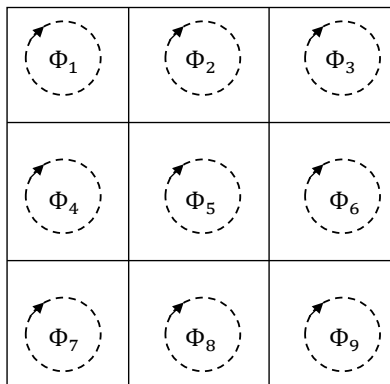


Рис. 6.21. Независимые, но не фундаментальные циклы

Отметим, что обратное утверждение неверно, а именно некоторая сумма фундаментальных циклов по модулю 2 не обязательно дает единственный цикл, но может представлять два и более цикла. Например, сумма $(\Phi_2 \oplus \Phi_3 \oplus \Phi_6 \oplus \Phi_7)$ соответствует двум циклам: $(a_2, a_3, a_{11}, a_{13})$ и (a_6, a_7, a_{15}) . Таким образом, для порождения всех циклов графа G не надо брать все $(2^{v(G)} - 1)$ комбинаций фундаментальных циклов и складывать их по модулю 2 – некоторые из этих сумм на самом деле не будут циклами. Более того, если данная сумма, скажем, $(\Phi_i \oplus \Phi_j \oplus \Phi_k \oplus \dots)$, не порождает цикла, то нельзя отбросить другие суммы, ее содержащие, так как, складывая по модулю 2 сумму $(\Phi_i \oplus \Phi_j \oplus \Phi_k \oplus \dots)$ с другой суммой, например $(\Phi_\alpha \oplus \Phi_\beta \oplus \Phi_\gamma \oplus \dots)$, которая сама может не порождать цикла, мы можем получить цикл. Для преодоления этой трудности Уэлч [5] предложил метод, позволяющий отбрасывать «некорректные» комбинации фундаментальных циклов, как только они появляются. Этот метод основан на упорядочении фундаментальных циклов в соответствии со специальным множеством правил.

Следует также заметить, что, хотя число фундаментальных циклов равно $v(G)$, сами эти циклы определены неоднозначно и зависят от первоначально выбранного остова T . Действительно, в графе G можно найти множество из $v(G)$ независимых циклов, которые нельзя получить добавлением ребер к дереву, как это делалось выше. О таком множестве не следует говорить, что оно «фундаментальное». На рис. 6.21 показано множество из $v(G) = 9$ независимых циклов приведенного графа, которое не может быть получено добавлением ребер ни к какому остову графа G и которое поэтому не будет фундаментальным множеством.

6.6.3. Разрезы

Понятие разреза очень тесно связано с понятием цикла и определяется так.

Если вершины неориентированного графа $G = (X, A)$ разбиты на два множества X^a и X^b (где $X^a \subset X$ и X^b является дополнением X^a относительно X), то множество ребер графа G , одни концевые вершины которых лежат в X^a , а другие – в X^b , называется разрезом графа G .

Множество ребер разреза можно представить множеством вершин пары (X^a, X^b) . Таким образом, остовный подграф $G_p = (X, A - (X^a, X^b))$, полученный из G удалением ребер, принадлежащих разрезу, является несвязным графом, состоящим по крайней мере из двух компонент. В графе на рис. 6.22 множество ребер, показанных пунктиром, образует разрез, определяемый множествами $X^a = \{x_i | i = 1, \dots, 4\}$ и $X^b = \{x_i | i = 1, \dots, 11\}$. Получающийся остовный подграф состоит из четырех связанных компонент:

$$\langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle, \langle x_5, x_6, x_7 \rangle, \langle x_8 \rangle, \langle x_9, x_{10}, x_{11} \rangle.$$

Множество ребер S , удаление которых из графа G дает несвязный остовный подграф $G_p = (X, A - S)$ и при этом не существует никакого собственного подмножества $S' \subset S$, такого, что граф $G_p = (X, A - S')$ также несвязен, называется **правильным разрезом**. Это множество можно также представить парой (X^a, X^b) , хотя теперь остовный подграф, полученный удалением правильного разреза из G , разбивает G на две связанные компоненты, одна из которых имеет своими вершинами множество X^a , а другая – множество X^b . В общем случае каждый разрез является объединением некоторого числа правильных разрезов. В графе на рис. 6.22, например, разрез, показанный пунктиром, является объединением трех правильных разрезов:

$\{(x_1, x_{11}), (x_4, x_9), (x_3, x_9)\}$, $\{(x_1, x_8), (x_4, x_8)\}$ и $\{(x_3, x_7), (x_4, x_5)\}$. Далее мы будем использовать слово «разрез» для обозначения правильного разреза, если только не оговорено противное.

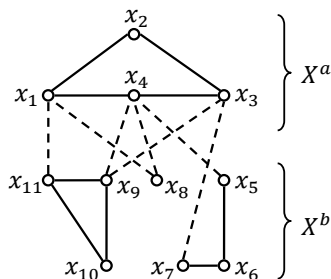


Рис. 6.22. Граф для иллюстрации понятия «разрез»

Двойственность понятий остова и разреза графа G становится очевидной, если вспомнить, что остов определяется как минимальное множество ребер, связывающее все вершины графа G , в то время как разрез является минимальным множеством ребер, отделяющим одни вершины от других. Из этого замечания совершенно очевидно, что любой остов графа G должен иметь по крайней мере одно общее ребро с каждым правильным разрезом.

Разрез был определен выше для неориентированного графа. Если граф $G = (X, A)$ – ориентированный, то разрез графа G определяется как множество дуг, соответствующих ребрам неориентированного дубликата \tilde{G} графа G . Некоторые из дуг разреза графа G будут ориентированы из X^a в X^b , и множество этих дуг будет записываться как $(X^a \rightarrow X^b)$, в то время как множество дуг, ориентированных из вершин множества X^b в вершины множества X^a , будет записываться как $(X^b \rightarrow X^a)$. Поэтому разрез (X^a, X^b) , состоящий из дуг ориентированного графа, определяется как объединение $(X^a \rightarrow X^b) \cup (X^b \rightarrow X^a)$.

Множество фундаментальных циклов неориентированного графа G было определено в предыдущем разделе как множество $v(G)$ циклов, каждый из которых получается путем добавления какого-нибудь ребра, не принадлежащего остову T , к ребрам этого остова. Аналогичным образом, имея в виду отмеченную выше двойственность между разрезами и остовами, фундаментальные

разрезы относительно остова T определяются как $n - 1$ разрезов, каждый из которых содержит одно и только одно ребро, принадлежащее дереву T .

Следующая теорема устанавливает связь между фундаментальными разрезами и фундаментальными циклами и дает способ построения фундаментальных разрезов.

Теорема 6.1. Если T – остов неориентированного графа G , то фундаментальный разрез, определяемый ребром a_i из T , образован a_i и теми ребрами из G , не принадлежащими T , которые после добавления к T дают фундаментальные циклы, содержащие a_i .

Доказательство. Если из остова T удалить ребро a_i , то T распадается на два поддерева T_1 и T_2 . Любое ребро, одна концевая вершина которого лежит в T_1 , а другая в T_2 , должно принадлежать фундаментальному разрезу, так как добавление любого такого ребра к ребрам из T_1 и T_2 приводит к образованию другого остова графа G , и следовательно, любое множество, не содержащее таких ребер, не будет разрезом. Множество таких ребер вместе с ребром a_i является разрезом, так как их удаление разбивает граф на два подграфа, один из которых имеет множеством своих вершин T_1 , а другой – T_2 . Значит, этот разрез является фундаментальным разрезом. Более того, так как ребро a_i является единственным ребром, через которое проходят цепи остова T , начинающиеся в вершинах из T_1 и оканчивающиеся в вершинах из T_2 , то единственными ребрами, замыкающими фундаментальные циклы, которые содержат ребро a_i , будут те, одна концевая вершина которых лежит в T_1 , а другая – в T_2 . Это доказывает теорему.

6.6.4. Матрицы циклов и разрезов

Пусть T – остов неориентированного графа. **Матрицей фундаментальных циклов** графа G называется матрица $\Phi = [\varphi_{ij}]$, состоящая из $v(G)$ строк и m столбцов, в которой $\varphi_{ij} = 1$, если ребро a_i принадлежит циклу Φ_i , и равно 0 в противном случае. Если ребра, не принадлежащие дереву T , пронумеровать последовательно от 1 до $v(G)$, а ребра дерева T пронумеровать от $v(G) + 1$ до m , то матрица циклов Φ будет иметь вид

$$\Phi = (I | \Phi_{12}),$$

где I – единичная матрица. Это объясняется тем, что каждый цикл Φ_i содержит одно и только одно ребро, не принадлежащее остову T , и

циклы всегда можно пронумеровать по числу принадлежащих им вне-остовных ребер, вследствие чего все единицы в первой $(v(G) \cdot (G))$ подматрице матрицы Φ лежат на диагонали.

Матрица фундаментальных разрезов $K = [k_{ij}]$ определяется аналогично, как матрица с $n - 1$ строками и m столбцами, где k_{ij} есть 1, если ребро a_j принадлежит разрезу K_i , и 0 в противном случае. При той же самой нумерации ребер, что и выше, матрица K имеет вид $K = (K_{ij} | I)$, так как теперь каждый фундаментальный разрез содержит одно и только одно ребро из ребер дерева T .

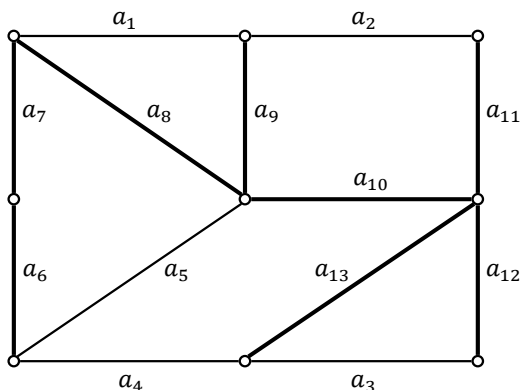


Рис. 6.23. Граф для иллюстрации понятий «матрица фундаментальных разрезов» и «матрица фундаментальных циклов»

В графе на рис. 6.23 возьмем остов, изображенный жирными линиями. Тогда матрица фундаментальных циклов равна

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
Φ_1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
Φ_2	0	1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0
Φ_3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
Φ_4	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	1
Φ_5	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0

Матрица фундаментальных разрезов равна

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
K_1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
K_2	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0
K_3	1	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0
K_4	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
K_5	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
K_6	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
K_7	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
K_8	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

где разрезы K_i , соответствующие ребрам остова, имеют номера $v(G) + I = 5 + i, I = 1, 2, \dots, 8$.

Существует несколько интересных соотношений между матрицами циклов, разрезов и инциденций. Ниже все арифметические операции являются операциями по модулю 2. Здесь мы будем рассматривать неориентированные графы без петель.

Теорема 6.2. Матрица инциденций B и транспонированная матрица фундаментальных циклов Φ^t ортогональны, т. е. $B - \Phi^t = 0$.

Теорема 6.3. Матрица фундаментальных циклов Φ и транспонированная матрица фундаментальных разрезов K^t ортогональны, т. е. $\Phi K^t = 0$.

Эти две теоремы являются следствием двух очевидных фактов:

- (1) каждая вершина в цикле инцидентна четному числу ребер (а в случае простого цикла – двум ребрам) этого цикла;
- (2) каждый разрез цикла, индуцированный некоторым разрезом, имеет четное число ребер, общих с этим разрезом.

Теорема 6.2 следует из (1), а теорема 6.3 – из (2), если вспомнить, что все операции рассматриваются по модулю 2, так что, например, $2 \equiv 0 \pmod{2}$. Кроме того, существуют доказательства этих теорем [2], не использующие предположения о фундаментальности циклов и разрезов. Следовательно, сформулированные теоремы справедливы для любых матриц циклов и разрезов. Последние определяются аналогичным образом.

По теореме 6.3 можно написать:

$$\Phi K_{11}^t = (I | \Phi_{12})(K_{11}^t | I) = K_{11}^t + \Phi_{12} = 0.$$

Поэтому

$$K_{11}^t = -\Phi_{12} = \Phi_{12}, \quad (6.34)$$

так как $-1 \equiv 1 \pmod{2}$. Вследствие этого матрица фундаментальных разрезов может быть немедленно получена, как только станет известна матрица фундаментальных циклов, и наоборот. Справедливость соотношения (6.34) можно проверить на приведенных выше матрицах Φ и K для графа, изображенного на рис. 6.23.

6.6.5. Эйлеровы циклы

Определение. Если дан неориентированный s -граф G , то **эйлеров цикл** (эйлерова цепь) – это такой цикл (цепь), который проходит ровно один раз по каждому ребру.

Очевидно, не все графы имеют эйлеровы циклы, но если эйлеров цикл существует, то это означает, что, следуя вдоль этого цикла, можно нарисовать граф на бумаге, не отрывая от нее карандаша.

Эйлер первым в своей знаменитой задаче о Кенигсбергских мостах рассмотрел вопрос о существовании таких циклов в графах.

Кенигсберг (теперь Калининград) расположен на обоих берегах реки Преголя и на двух островах этой реки. Берега реки и два острова соединены семью мостами, как показано на карте на рис. 6.24, *а*.

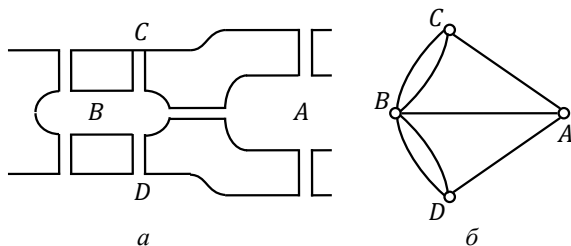


Рис. 6.24. Карта Кенигсберга (*а*); эквивалентный граф (*б*)

Вопрос состоит в том, можно ли, начав с некоторой точки, совершить прогулку и вернуться в исходную точку, пройдя по каждому мосту ровно один раз. Если каждый берег реки и острова считать вершиной графа, а каждый мост – ребром, то карту рис. 6.24, *а* можно представить в виде 2-графа, изображенного на рис. 6.24, *б*, и ответ на поставленный вопрос зависит теперь от существования эйлерова цикла в этом графе. Эйлер установил, что указанный граф *не* содержит эйлерова цикла, и этот результат ознаменовал рождение теории графов.

Основная теорема о существовании эйлеровых циклов формулируется так.

Теорема 6.4(а). Связный неориентированный s -граф G содержит эйлеров цикл (эйлерову цепь) тогда и только тогда, когда число вершин нечетной степени равно 0.

Доказательство. Мы докажем эту теорему для случая цикла; случай цепи рассматривается аналогично.

Необходимость. Любой эйлеров цикл должен прийти в вершину по одному ребру и покинуть ее по другому, так как любое ребро должно использоваться ровно один раз. Поэтому, если G содержит эйлеров цикл, то степени всех вершин должны быть четными.

Достаточность. Пусть G – связный неориентированный s -граф, все вершины которого имеют четную степень. Начнем путь из некоторой произвольной вершины x_0 и пойдем по некоторому ранее не использованному ребру к следующей вершине, и так до тех пор, пока не вернемся в вершину x_0 и не замкнем цикл. Если все ребра окажутся использованными, то нужный эйлеров цикл построен. Если же некоторые ребра не использованы, то пусть Φ – только что построенный цикл. Так как граф G связан, то цикл Φ должен проходить через некоторую вершину, скажем x_i , являющуюся конечной вершиной какого-либо до сих пор не использованного ребра. Если удалить все ребра, принадлежащие Φ , то в оставшемся графе все вершины по-прежнему будут иметь четную степень, так как в цикле Φ должно быть четное число ребер (0 является четным числом), инцидентных каждой вершине.

Начиная теперь с x_i , получаем цикл Φ' , начинающийся и оканчивающийся в x_i . Если все оставшиеся ранее ребра использованы для цикла Φ' , то процесс окончен. Нужный эйлеров цикл будет образован частью цикла Φ от вершины x_0 до x_i , затем циклом Φ' и, наконец, частью цикла Φ от вершины x_i до x_0 . Если же все еще остались неиспользованные ребра, то объединение построенных выше циклов Φ и Φ' дает новый цикл Φ . Мы снова можем найти вершину x_j , принадлежащую циклу и являющуюся концевой вершиной некоторого неиспользованного ребра. Затем мы можем приступить к построению нового цикла Φ' , начинающегося в x_j , и так продолжать до тех пор, пока не будут использованы все ребра и не будет получен эйлеров цикл Φ . Это доказывает теорему.

Очевидно, что если граф G несвязен (за исключением изолированных вершин), то эйлеров цикл не существует, так как нет никакой цепи, ведущей из одной его компоненты в другую. Очевидно также, что в случае эйлеровой цепи две ее конечные вершины p и q являются вершинами нечетной степени.

Если G – ориентированный s -граф, то справедлива теорема, аналогичная предыдущей, а именно:

Теорема 6.4(б). Связный ориентированный s -граф G содержит эйлеров цикл (эйлерову цепь) тогда и только тогда, когда все полустепени захода $d_t(x_i)$ и полустепени исхода $d_0(x_i)$ вершин удовлетворяют условиям:

$$\text{для случая цикла} \quad d_t(x_i) = d_0(x_i) \quad \forall x_i \in X,$$

$$\text{для случая цепи} \quad d_t(x_i) = d_0(x_i) \quad \forall x_i \neq p \text{ или } q,$$

$$d_t(q) = d_0(q) + 1$$

и

$$d_t(p) = d_0(p) - 1,$$

где p – начальная, а q – конечная вершины эйлеровой цепи.

Существует очень простой алгоритм построения эйлерова цикла в неориентированном графе (если такой цикл существует). Этот алгоритм легко может быть распространен на ориентированные графы и состоит в следующем.

Алгоритм нахождения эйлерова цикла. Начинать с некоторой вершины p и каждый раз вычеркивать пройденное ребро. Не проходить по ребру, если удаление этого ребра приводит к разбиению графа на две связные компоненты (не считая изолированных вершин).

7. ПОТОКИ В СЕТЯХ

Одной из наиболее интересных и важных задач теории графов является задача определения максимального потока, протекающего от некоторой вершины s графа (источника) к некоторой конечной вершине t (стоку). При этом каждой дуге (x_i, x_j) графа G приписана некоторая пропускная способность q_{ij} , и эта пропускная способность определяет наибольшее значение потока, который может протекать по данной дуге. Эта задача и ее варианты могут возникать во многих практических приложениях, например при определении максимальной интенсивности транспортного потока между двумя пунктами на карте дорог, представляемой графом. В этом примере решение задачи

о максимальном потоке укажет также ту часть сети дорог, которая «насыщена» и образует «узкое место» в отношении потока между двумя указанными концевыми пунктами.

Метод решения задачи о максимальном потоке (от s к t) был предложен Фордом и Фалкерсоном [37], их «техника пометок» составляет основу других алгоритмов решения многочисленных задач, являющихся простыми обобщениями или расширениями указанной задачи. В литературе встречаются интересные для энергетики варианты задачи о максимальном потоке (от s к t).

Если вместо одного источника и одного стока рассмотреть несколько заданных источников и стоков, причем между различными источниками и стоками протекают потоки различных продуктов, то задача максимизации суммы всех потоков между источниками и стоками называется задачей о многопродуктовом потоке. В этой задаче пропускная способность q_{ij} дуги (x_i, x_j) является ограничением для суммы всех потоков всех видов продуктов через эту дугу.

Во всех рассмотренных выше случаях неявно допускалось, что поток на входе дуги равен потоку на выходе. Если отказаться от допущения, что поток на входе дуги такой же, как и на выходе, и рассмотреть граф, в котором выходной поток дуги равен ее входному потоку, умноженному на некоторое неотрицательное число, то задачу о максимальном потоке (от s к t) называют задачей о потоках с выигрышами. В такой задаче потоки могут и «порождаться», и «поглощаться» самим графом, так что поток, входящий в s , и поток, покидающий t , могут изменяться совершенно независимо.

7.1. Основная задача о максимальном потоке (от s к t)

Рассмотрим граф $G = (X, A)$ с пропускными способностями дуг q_{ij} , источником s и стоком t ; $s, t \in X$. Множество чисел ξ_{ij} , определенных на дугах $(x_i, x_j) \in A$, называют потоками в дугах, если выполняются следующие условия:

$$\sum_{x_j \in \Gamma(x_i)} \xi_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(x_i)} \xi_{ki} = \begin{cases} v, & \text{если } x_i = s, \\ -v, & \text{если } x_i = t, \\ 0, & \text{если } x_i \neq s, t \end{cases} \quad (7.1)$$

и

$$\xi_{ij} \leq q_{ij} \quad \forall (x_i, x_j) \in A. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.1) является уравнением сохранения потока. Оно утверждает, что поток, втекающий в вершину, равен потоку, вытека-

ищему из вершины, за исключением вершин, являющихся источником и стоком (вершин s и t), для которых существуют сетевые вытекания и приток величины v соответственно. Соотношения (7.2) указывают просто на то, что пропускные способности ограничены для каждой дуги графа G . Задача состоит в нахождении такого множества потоков по дугам, чтобы величина

$$v = \sum_{x_j \in \Gamma(s)} \xi_{sj} = \sum_{x_k \in \Gamma^{-1}(t)} \xi_{kt} \quad (7.3)$$

была максимальной. Здесь ξ_{sj} и ξ_{kt} записаны для потоков из вершины s в x_j и из x_k в t соответственно. Алгоритм расстановки пометок, предложенный Фордом и Фалкнерсоном [38] для решения этой задачи, основан на следующей теореме (определение понятия разреза см. п. 6.6.3).

Теорема 7.1. (Теорема о максимальном потоке и минимальном разрезе [8; 10, 11].) Величина максимального потока из s в t равна величине минимального разреза $(X_m \rightarrow \tilde{X}_m)$, отделяющего s от t .

Разрез $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$ отделяет s от t , если $s \in X_0$ и $t \in \tilde{X}_0$. Величиной такого разреза называется сумма пропускных способностей всех дуг из G , начальные вершины которых лежат в X_0 , а конечные в \tilde{X}_0 , т. е.

$$v(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0) = \sum_{(x_i, x_j) \in (X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)} q_{ij}.$$

Минимальный разрез $(X_m \rightarrow \tilde{X}_m)$ – это разрез с наименьшим таким значением.

Доказательство. Здесь дано конструктивное доказательство теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе. Используемый метод непосредственно приводит к алгоритму расстановки пометок, излагаемому ниже.

Совершенно очевидно, что максимальный поток из s в t не может быть больше, чем $v(X_m \rightarrow \tilde{X}_m)$, так как всякая цепь, ведущая из s в t , проходит хотя бы через одну дугу данного разреза. Поэтому достаточно установить существование потока с таким значением. Допустим теперь, что поток задается m -мерным вектором ξ , и определим разрез $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$ рекурсивным применением указанного ниже шага (б):

(а) начать, полагая $X_0 \leftarrow \{s\}$;

(б) если $x_i \in X_0$ и, кроме того, $\xi_{ij} < q_{ij}$ или $\xi_{ij} > 0$, то включить x_j в множество X_0 и повторять этот шаг до тех пор, пока множество X_0 нельзя будет расширять дальше.

Теперь в зависимости от того, будет ли $t \in X_0$ или $t \notin X_0$, могут возникнуть два случая.

Рассмотрим случай, когда $t \in X_0$. В соответствии с шагом (б) отношение $t \in X_0$ означает следующее: существует такая «неориентированная» цепь, ведущая из вершины s в вершину t , что для каждой дуги (x_i, x_j) , используемой цепью в прямом направлении (прямой дуги), $\xi_{ij} < q_{ij}$, а для каждой дуги (x_k, x_i) , используемой цепью в обратном направлении, т. е. в направлении от x_k к x_i (обратной дуги), $\xi_{ki} > 0$. Такая цепь из дуг, ведущая из s в t , будет называться *аугментальной* (от *augme* (лат.) – увеличение, приращение, прирост) цепью потока.

Пусть

$$\delta_f = \min_{(x_k, x_\ell)} [q_{ij} - \xi_{ij}] \text{ для прямой дуги } (x_i, x_j); \quad (7.4)$$

$$\delta_b = \min_{(x_k, x_\ell)} [\xi_{k\ell}] \text{ для обратной дуги } (x_k, x_\ell); \quad (7.5)$$

$$\delta = \min[\delta_f, \delta_b].$$

Если теперь величину δ прибавить к потоку во всех прямых дугах и вычесть во всех обратных дугах цепи, то в результате получится новый допустимый поток, который на δ единиц больше, чем предыдущий. Это очевидно в силу того, что прибавление величины δ к потоку в прямых дугах не может привести к превышению ни одной из пропускных способностей этих дуг (так как $\delta \leq \delta_f$), а вычитание δ из потока в обратных дугах не может сделать поток в этих дугах отрицательным (так как $\delta \leq \delta_b$). Используя новый исправленный поток, можно затем повторить шаги (а) и (б) и, определив новый разрез $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$, повторить предыдущие рассуждения.

Рассмотрим случай, когда $t \notin X_0$ (т. е. $t \in \tilde{X}_0$). В соответствии с шагом (б) $\xi_{ij} = q_{ij}$ для всех $(x_i, x_j) \in (X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$ и $\xi_{k\ell} = 0$ для всех $(x_k, x_\ell) \in (\tilde{X}_0 \rightarrow X_0)$. Следовательно,

$$\sum_{(x_i, x_j) \in (X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)} \xi_{ij} = \sum_{(x_i, x_j) \in (X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)} q_{ij}$$

и

$$\sum_{(x_k, x_\ell) \in (\tilde{X}_0 \rightarrow X_0)} \xi_{k\ell} = 0,$$

т. е. величина потока, а именно

$$\sum_{(x_i, x_j) \in (X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)} \xi_{ij} - \sum_{(x_k, x_\ell) \in (\tilde{X}_0 \rightarrow X_0)} \xi_{k\ell},$$

равна величине разреза $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$.

Так как в первом случае поток все время увеличивается по крайней мере на единицу, то при целочисленности всех q_{ij} максимальный поток получим за конечное число шагов – как только возникнет второй случай. Этот поток будет равен величине текущего разреза $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$, который, следовательно, тогда должен быть равным минимальному разрезу. Теорема доказана.

Конструктивный метод, использованный при доказательстве теоремы о максимальном потоке и минимальном разрезе, позволяет сразу же получить алгоритм вычисления максимального потока из данной вершины s в данную вершину t в графе с известными пропускными способностями. Такой алгоритм будет сейчас описан.

Алгоритм начинает работу с произвольного допустимого потока (можно взять и нулевой поток), затем стремится увеличить величину потока с помощью систематического поиска всех возможных аугментальных цепей потока от s к t . Поиск аугментальной цепи осуществляется с помощью расстановки пометок в вершинах графа. Пометки указывают, вдоль каких дуг может быть увеличен поток и насколько. Как только найдена одна из таких цепей, поток вдоль нее увеличивают до максимального значения, все пометки в вершинах стираются и вновь полученный поток используется в качестве исходного при новой расстановке пометок. Алгоритм заканчивает работу и дает максимальный поток, если нельзя найти ни одну аугментальную цепь.

7.2. Алгоритм расстановки пометок для задачи о максимальном (от s к t) потоке

А. Расстановка пометок. Вершина может находиться в одном из трех состояний: вершине приписана пометка и вершина просмотрена (т. е. она имеет пометку и все смежные с ней вершины «обработаны»); пометка приписана, но вершина не просмотрена (т. е. она имеет пометку, но не все смежные с ней вершины обработаны); вершина не имеет пометки. Пометка произвольной вершины x_i состоит из двух частей и имеет один на двух видов: $(+x_j, \delta)$ или $(-x_j, \delta)$. Часть $+x_j$ пометки первого типа означает, что поток допускает увеличение вдоль дуги (x_j, x_i) . Часть $-x_j$ пометки другого типа означа-

ет, что поток может быть уменьшен вдоль дуги (x_i, x_j) . В обоих случаях δ задает максимальную величину дополнительного потока, который может протекать от s к x_i вдоль построенной аугментальной цепи потока. Присвоение пометки вершине x_i соответствует нахождению аугментальной цепи потока от s к x_i . Сначала все вершины не имеют пометок.

Шаг 1. Присвоить вершине s пометку $(+s, \delta(s) = \infty)$. Вершине s присвоена пометка, и она просмотрена, все остальные вершины без пометок.

Шаг 2. Взять некоторую непросмотренную вершину с пометкой; пусть ее пометка будет $(\pm x_k, \delta(x_k))$.

(I) Каждой непомеченной вершине $x_j \in \Gamma(x_i)$, для которой $\xi_{ij} < q_{ij}$, присвоить пометку $(-x_i, \delta(x_j))$, где $\delta(x_j) = \min[\delta(x_i), q_{ij} - \xi_{ij}]$.

(II) Каждой непомеченной вершине $x_j \in \Gamma^{-1}(x_i)$, для которой $\xi_{ji} > 0$, присвоить пометку $(-x_i, \delta(x_j))$, где $\delta(x_j) = \min[\delta(x_i), \xi_{ji}]$. (Теперь вершина x_i и помечена и просмотрена, а вершины x_j , пометки которым присвоены в (I) и (II), являются непросмотренными.) Обозначить каким либо способом, что вершина x_i просмотрена.

Шаг 3. Повторять шаг 2 до тех пор, пока либо вершина t не будет помечена (и тогда перейти к шагу 4), либо t будет не помечена и никаких других пометок нельзя будет расставить. В этом случае алгоритм заканчивает работу с максимальным вектором потока ξ . Здесь следует отметить, что если X_0 — множество помеченных вершин, а \tilde{X}_0 — множество непомеченных, то $(X_0 \rightarrow \tilde{X}_0)$ является минимальным разрезом.

Б. Увеличение потока.

Шаг 4. Положить $x = t$ и перейти к шагу 5.

Шаг 5. (I) Если пометка в вершине x имеет вид $(+z, \delta(x))$, то изменить поток вдоль дуги (z, x) с $\xi(z, x)$ на $(\xi(z, x) + \delta(x))$.

(II) Если пометка в вершине x имеет вид $(-z, \delta(x))$, то изменить поток вдоль дуги (x, z) с $\xi(x, z)$ на $(\xi(x, z) - \delta(x))$.

Шаг 6. Если $z = s$, то стереть все пометки и вернуться к шагу 1, чтобы вновь начать расставлять пометки, но используя уже

улучшенный поток, найденный на шаге 5. Если $z \neq s$, то взять $x = z$ и вернуться к шагу 5.

Пример

Рассмотрим граф, изображенный на рис. 7.1, и возьмем в качестве источника вершину x_1 , а в качестве стока – вершину x_9 . Пропускные способности дуг указаны на рисунке. Требуется найти максимальный поток от x_1 к x_9 . В качестве начального возьмем поток с нулевыми значениями на всех дугах.

Алгоритм работает следующим образом.

Шаг 1. Припишем вершине x_1 пометку $(+x_1, \infty)$.

Шаг 2. (I) Множество вершин $\{x_j | x_j \in \Gamma(x_1), \xi_{1j} < q_{1j}, x_j \text{ – не помечена}\} = \{x_2, x_4\}$, вершине x_2 приписывается пометка $(+x_1, \min[\infty, 14 - 0])$, т. е. $(+x_1, 14)$, вершине x_4 приписывается $(+x_1, \min[\infty, 23 - 0])$, т. е. $(+x_1, 23)$.

(II) Множество вершин $\{x_j | x_j \in \Gamma^{-1}(x_1), \xi_{j1} > 0, x_j \text{ – не помечена}\}$ является пустым. Итак, x_1 помечена и просмотрена, x_2 и x_4 помечены и не просмотрены, а все остальные вершины не помечены. Повторяем шаг 2 и первой просматриваем вершину x_2 .

(III) Множество $\{x_j | x_j \in \Gamma^{-1}(x_2), \xi_{2j} > q_{2j}, x_j \text{ – не помечена}\} = \{x_3\}$. Для x_3 пометкой будет $(+x_2, \min[14, 10 - 0]) = (+x_2, 10)$.

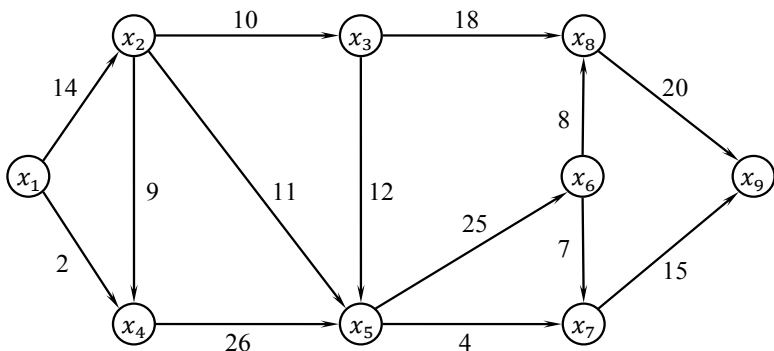


Рис. 7.1. Граф к примеру 7.2.1

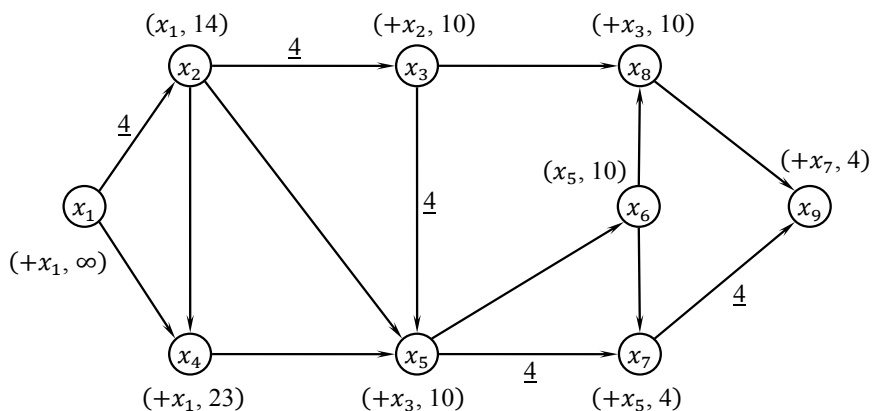


Рис. 7.2, а. Потоки и пометки после 1-й итерации

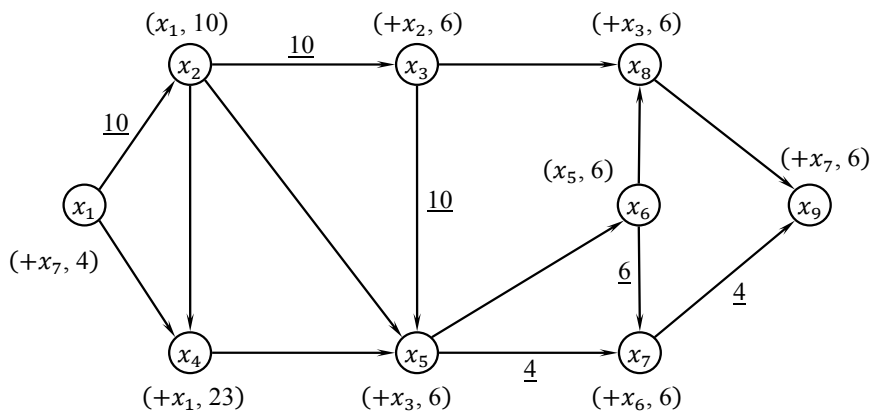


Рис. 7.2, б. Потоки и пометки после 2-й итерации

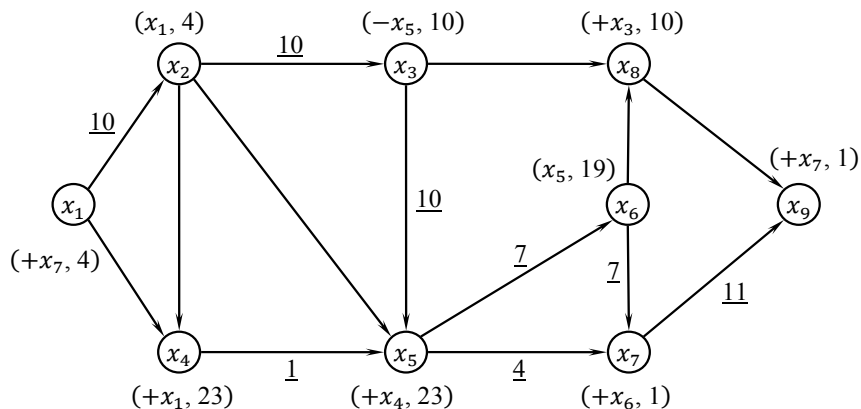


Рис. 7.2, в. Потoki и пометки после 3-й итерации

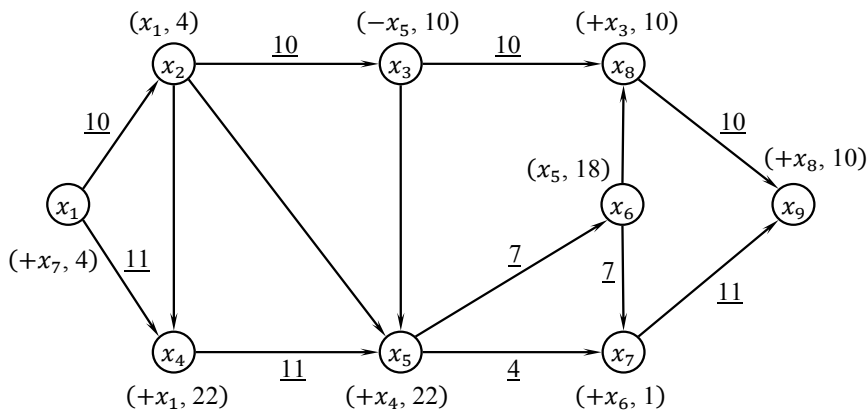


Рис. 7.2, г. Потoki и пометки после 4-й итерации

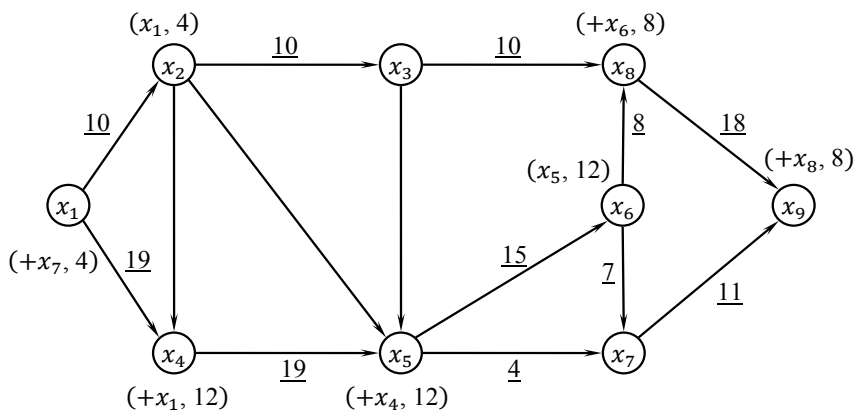


Рис. 7.2, д. Потоки и пометки после 5-й итерации

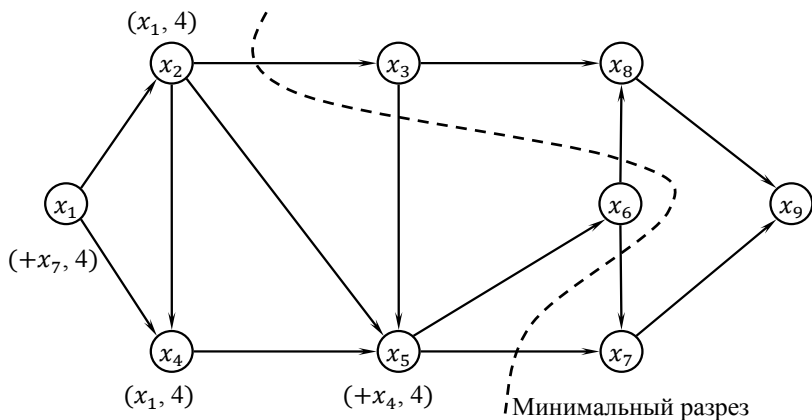


Рис. 7.2, е. Потоки и пометки после 6-й итерации

(IV) Множество $\{x_j | x_j \in \Gamma^{-1}(x_2), \xi_{j2} < 0, x_j - \text{не помечена}\}$ является пустым. Теперь вершины x_1 и x_2 помечены и просмотрены, а x_3 и x_4 помечены, но не просмотрены.

Беря для просмотра x_3 и повторяя шаг 2, придем к следующим пометкам:

- для x_5 пометкой будет $(+x_3, \min[10, 12 - 0]) = (+x_3, 10)$;
- для x_8 пометкой будет $(+x_3, \min[10, 18 - 0]) = (+x_3, 10)$.

Беря для просмотра x_4 , найдем, что никаких пометок расставить нельзя. Продолжая просмотр с x_5 , получим следующие пометки:

- пометка для x_6 будет $(+x_5, \min[10, 25 - 0]) = (+x_5, 10)$;
- пометка для x_7 будет $(+x_3, \min[10, 4 - 0]) = (+x_3, 4)$;
- пометка для x_9 будет $(+x_7, \min[4, 15 - 0]) = (+x_4, 4)$.

Переходя к шагам 4 и 5, получим:

$$x = x_9; \quad \xi_{7,p} = 0 + 4 = 4;$$

$$x = x_7; \quad \xi_{5,7} = 4;$$

$$x = x_5; \quad \xi_{3,5} = 4;$$

$$x = x_3; \quad \xi_{2,3} = 4;$$

$$x = x_2; \quad \xi_{1,2} = 4.$$

Вид потока в конце шага 5 и пометки вершин до их стирания на шаге 6 показаны на рис. 7.2, *a*. Все потоки показаны подчеркиванием.

Стирая пометки у вершин и возвращаясь к шагу 1 для второго прохода, получим следующие новые пометки вершин (помеченные, но не просмотренные вершины просматриваются в порядке возрастания их номеров).

Шаг 3. Пометкой для x_1 будет $(+x_1, \infty)$,

пометкой для x_2 будет $(+x_1, \min[\infty, 14 - 4]) = (+x_1, 10)$,

пометкой для x_4 будет $(+x_1, \min[\infty, 23 - 0]) = (+x_1, 23)$,

теперь вершина x_1 помечена и просмотрена.

Пометкой для x_2 будет $(+x_2, \min[10, 10 - 4]) = (+x_2, 6)$,

теперь вершина x_2 помечена и просмотрена.

Пометкой для x_5 будет $(+x_3, \min[6, 12 - 4]) = (+x_3, 6)$,

пометкой для x_8 будет $(+x_3, \min[6, 18 - 0]) = (+x_3, 6)$,

теперь вершина x_3 помечена и просмотрена,

вершина x_4 также помечена и просмотрена.

Пометкой для x_6 будет $(+x_5, \min[6, 25 - 0]) = (+x_5, 6)$,

теперь вершина x_5 помечена и просмотрена.

Пометкой для x_7 будет $(+x_6, \min[6, 7 - 0]) = (+x_6, 6)$,

теперь вершина x_6 помечена и просмотрена.

Пометкой для x_9 будет $(+x_7, \min[6, 15 - 4]) = (+x_7, 6)$.

Шаги 4 и 5.

Новые потоки увеличились следующим образом:

$$\xi_{7,9} = 4 + 6 = 10; \quad \xi_{6,7} = 0 + 6 = 6; \quad \xi_{5,6} = 0 + 6 = 6;$$

$$\xi_{3,5} = 4 + 6 = 10; \quad \xi_{2,3} = 4 + 6 = 10; \quad \xi_{1,2} = 4 + 6 = 10,$$

все остальные значения потока не изменились.

Новый вид потока и пометки вершин до стирания показан на рис. 7.2, б.

Продолжая дальше, получаем после каждого прохода алгоритма потоки и пометки, изображенные последовательно на рис. 7.2, в–д. Алгоритм заканчивает работу, когда вершина не может быть помечена; «заключительные» пометки показаны на рис. 7.2, е.

Полученный поток на рис. 7.2, е является максимальным потоком со значением 29, соответствующий минимальный разрез показан пунктиром.

7.3. Простые варианты задачи о максимальном потоке (от s к t)

Рассмотрим ряд задач, связанных с потоками, которые просто сводятся к задаче о максимальной потоке (от s к t), рассмотренной ранее.

7.3.1. Графы со многими источниками и стоками

Рассмотрим граф с n_s источниками и n_t стоками. Предположим, что поток может идти от любого источника к любому стоку. Задачу нахождения максимального общего потока от всех источников ко всем стокам можно преобразовать в простую задачу о максимальном потоке (от s к t) путем добавления нового искусственного источника s и нового искусственного стока t с добавлением дуг, ведущих от s к каждому истинному источнику и от каждого истинного стока к t .

На рис. 7.3 показано, как множества источников и стоков могут быть сведены к единственному источнику и единственному стоку. Пропускные способности дуг, ведущих от s к источникам, могут быть выбраны равными бесконечности. В случае когда производительность источника s_k ограничена, пропускная способность соответствующей дуги (s, s_k) может быть выбрана равной этой границе. Точно так же пропускные способности дуг, ведущих от стоков к t , могут быть ограничены некоторой величиной (зависящей от стоков) или положены равными бесконечности, если такой границы нет. Если в задаче некоторые стоки должны снабжаться только определенными источниками и наоборот, то она уже не будет простой разновидностью задачи о максимальном потоке (от s к t), а станет задачей о многопродуктовом потоке.

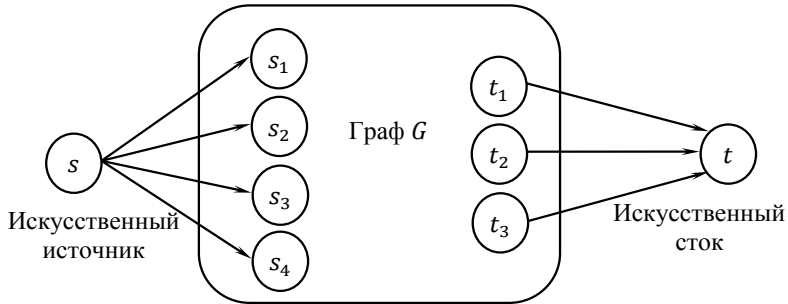


Рис. 7.3. Граф с искусственным источником и искусственным стоком

7.3.2. Графы с пропускными способностями дуг и вершин

Пусть в графе G дуги имеют пропускные способности q_{ij} и пусть вершины графа имеют пропускные способности ω_j ($j = 1, 2, \dots, n$), скажем, такие, что полный поток, входящий в вершину x_j , должен иметь значение меньше, чем ω_j , т. е.

$$\sum_{x_i \in \Gamma^{-1}(x_j)} \xi_{ij} \leq \omega_j, \quad \forall x_j.$$

Пусть требуется найти максимальный поток между вершинами s и t такого графа.

Определим граф G_0 так, чтобы каждая вершина x_j графа G соответствовала двум вершинам x_j^+ и x_j^- в графе G_0 , причем каждой дуге (x_i, x_j) из G , инцидентной вершине x_j , соответствует дуга (x_i^-, x_j^+) из G_0 , инцидентная вершине x_j^+ , и каждой дуге (x_j, x_k) из G , исходящей из x_j , соответствует дуга (x_j^-, x_k^+) из G_0 , исходящая из x_j^- . Кроме того, введем дугу между x_j^+ и x_j^- с пропускной способностью ω_j , т. е. равной пропускной способности вершины x_j .

На рис. 7.4, а дан пример графа с пропускными способностями дуг и вершин, а на рис. 7.4, б показан граф G , построенный в соответствии с приведенным описанием.

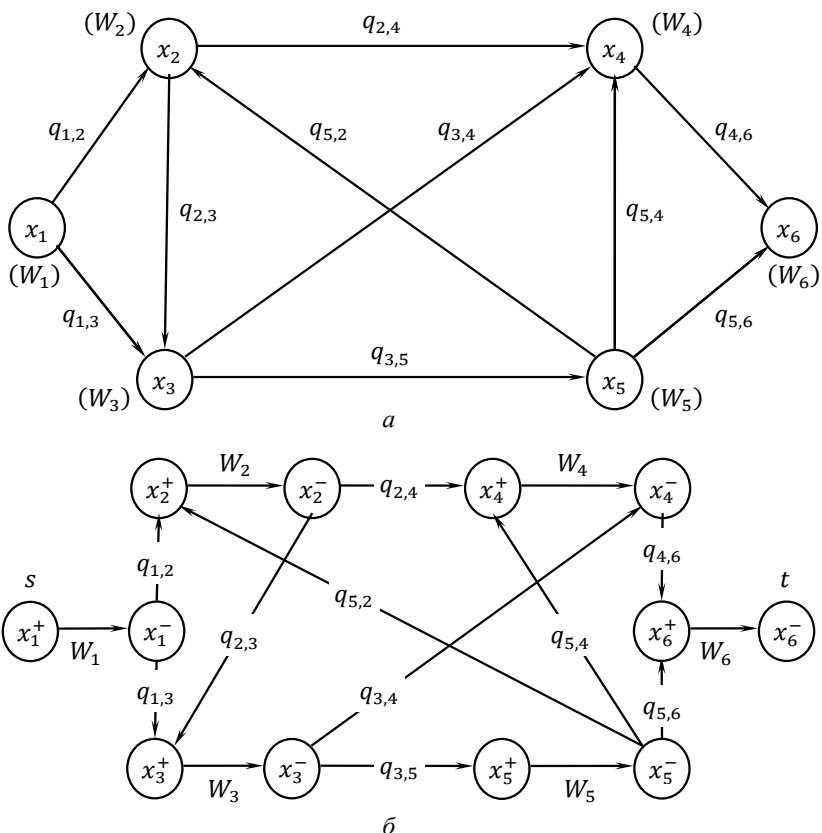


Рис. 7.4. Граф с пропускными способностями дуг и вершин (а); граф с пропускными способностями дуг и вершин преобразованный для решения задачи о максимальном потоке (б)

Так как полный поток, входящий в вершину x_j^+ , обязательно должен протекать по дуге (x_j^+, x_i^-) с пропускной способностью ω_j , то максимальный поток в графе G с пропускными способностями дуг и вершин равен максимальному потоку в графе G_0 , имеющем только пропускные способности дуг. Следует заметить, что если минимальный разрез в G_0 не содержит дуги вида (x_j^+, x_i^-) , то пропускные способности вершин в G пассивны и излишни. Если же минимальный разрез в G_0 содержит такие дуги, то соответствующие вершины в G насыщены полученным максимальным потоком.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Нормальное распределение							
10	X	nk	p-teor	n-teor	σk^2	-nk)^2/(6σ^6)	
11	10,5	4	0,02	1,90	1,87	2,35	
12	11,5	3	0,06	6,19	5,81	1,75	
13	12,5	16	0,14	13,96	12,01	0,35	
14	13,5	19	0,22	21,86	17,08	0,48	
15	14,5	28	0,24	23,78	18,12	0,98	
16	15,5	16	0,18	17,96	14,73	0,26	
17	16,5	10	0,09	9,41	8,53	0,04	
18	17,5	3	0,03	3,43	3,31	0,05	
19	18,5	1	0,01	0,87	0,86	0,02	
Всего		100			хи^2	6,29	
МО	14,2				г	8	
М кв	205,2		β	0,9	хи^2 лев	2,7	
s^2	2,7				хи^3 пр	15,5	
s	1,6						

Рис. П.1. Проверка гипотезы о нормальном распределении

Приложение 2

Распределение Пирсона

Распределение Пирсона (хи-квадрат-распределение) с n степенями свободы – это распределение суммы квадратов $\chi_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$ n независимых случайных величин x_1, x_2, \dots, x_n , имеющих стандартное нормальное распределение с параметрами 0 и 1, $x_i \sim N(0, 1)$. Плотность вероятностей хи-квадрат-распределения

$$k_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n/2} \Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-x/2}, & x > 0, n \geq 1, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

где $\Gamma(\)$ – гамма-функция.

Хи-квадрат-распределение можно рассматривать как частный случай гамма-распределения. Подобно гамма-распределению плотность и функция хи-квадрат-распределения при малых n имеет экс-

понижающийся характер, а при увеличении n приближается по виду к нормальному распределению (рис. П.2, П.3).

Математическое ожидание и дисперсия хи-квадрат-распределения равны соответственно n и $2n$. Характеристическая функция хи-квадрат-распределения имеет вид $f(t) = (1 - 2it)^{-n/2}$.

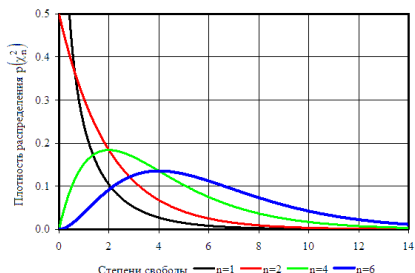


Рис. П.2. Плотность χ^2 -распределения при различных степенях свободы n

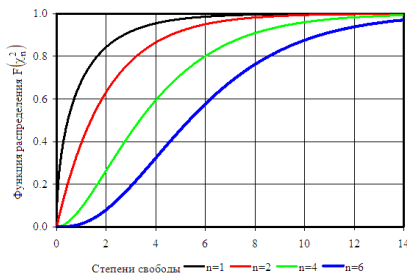


Рис. П.3. Функция χ^2 -распределения при различных степенях свободы n

При $n \rightarrow \infty$ распределение нормальной величины $(\chi_n^2 - n)/\sqrt{2n}$ стремится к нормальному распределению:

$$P\left\{\frac{(\chi_n^2 - n)}{\sqrt{2n}} < x\right\} \rightarrow \Phi(x), n \rightarrow \infty.$$

Более точная аппроксимация:

$$P\left\{\frac{(\chi_n^2 - n)}{\sqrt{2n}} < x\right\} \rightarrow \Phi(\sqrt{2x} - \sqrt{2n-1}), n \rightarrow \infty,$$

где $\Phi(x)$ – функция распределения стандартного нормального закона.

Приложение 3

Распределение Стьюдента

Распределение t Стьюдента – это распределение случайной величины

$$T = \frac{U\sqrt{n}}{\sqrt{X}},$$

где случайные величины U и X независимы, U имеет стандартное нормальное распределение, $U \sim N(0, 1)$, а $X \sim \chi^2(n)$ – распределение

хи-квадрат с n степенями свободы. При этом n называется «числом степеней свободы» распределения Стьюдента.

Распределение Стьюдента было введено в 1908 г. английским статистиком В. Госсетом. В настоящее время распределение Стьюдента – одно из наиболее используемых при анализе реальных данных. Его применяют при оценивании математического ожидания, прогнозного значения и других характеристик с помощью доверительных интервалов при проверке гипотез о значениях математических ожиданий, коэффициентов регрессионной зависимости, гипотез однородности выборок и т. п.

Моменты. Случайная величина $t \sim t(n)$ имеет моменты порядков $k < n$, причем:

- если k нечетно, $E[t^k] = 0$;
- если k четно,

$$E[t^k] = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-k}{2}\right) n^{n/2}}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

В частности, $E[t^k] = 0$, $D[t] = n/(n-2)$, если $n > 2$.

Связь с другими распределениями. Распределение Стьюдента является частным случаем распределения Пирсона [26].

Распределение Стьюдента сходится к стандартному нормальному при $n \rightarrow \infty$. Пусть дана последовательность случайных величин $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $t_n \sim t(n)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда $t_n \rightarrow N(0, 1)$ по распределению при $n \rightarrow \infty$.

Квадрат случайной величины, имеющей распределение Стьюдента, имеет распределение Фишера. Пусть $t \sim t(n)$. Тогда $t^2 \sim F(1, n)$.

Применение распределения Стьюдента. Распределение Стьюдента используется в статистике для точечного оценивания, построения доверительных интервалов и тестирования гипотез, касающихся неизвестного среднего статистической выборки из нормального распределения. В частности, пусть X_1, \dots, X_n – независимые случайные величины, такие что $X_i \sim N(m, \sigma^2)$. Обозначим \bar{X} выборочное среднее этой выборки, а S^2 – ее выборочную дисперсию. Тогда $(\bar{X} - m)/(S/\sqrt{n}) \sim t(n-1)$.

Приложение 4

Распределение Фишера

Определение. Пусть Y_1, Y_2 – две независимые случайные величины, имеющие распределение хи-квадрат: $Y_i \sim \chi^2(d_i)$, где $d_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, 2$. Тогда распределение случайной величины

$$F = \frac{Y_1/d_1}{Y_2/d_2}$$

называется распределением Фишера (распределением Снедекора) со степенями свободы d_1 и d_2 (пишут $F \sim F(d_1, d_2)$).

Плотность распределения

$$f(x) = \frac{\sqrt{\frac{(d_1 x)^{d_1} (d_2)^{d_2}}{(d_1 x + d_2)^{d_1 + d_2}}}}{xB\left(\frac{d_1}{2}, \frac{d_2}{2}\right)}.$$

Математическое ожидание случайной величины, имеющей распределение Фишера, имеет вид:

$$M(F) = \frac{d_2}{d_2 - 2}, d_2 > 2.$$

Дисперсия

$$D(F) = \frac{2d_2^2(d_1 + d_2 - 2)}{d_1(d_2 - 2)^2(d_2 - 4)}, d_2 > 4.$$

Свойства распределения Фишера:

- если $F \sim F(d_1, d_2)$, то $1/F \sim F(d_2, d_1)$;
- распределение Фишера сходится к единице (рис. П.4, рис. П.5);
- если $F_{d_1 d_2} \sim F(d_1, d_2)$, то случайные величины $d_1 F_{d_1 d_2}$ сходятся по распределению к $\chi^2(d_1)$ при $d_2 \rightarrow \infty$.

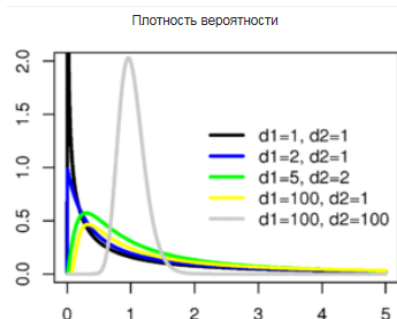


Рис. П.4. Плотность распределения Фишера

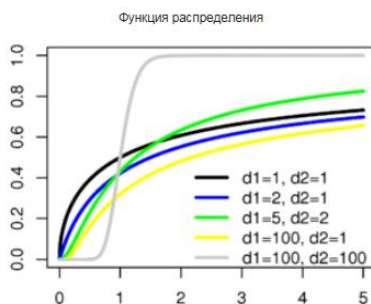


Рис. П.5. Функция распределения Фишера

8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богатырев Л. Л., Манусов В. З., Содномдорж Д. Математическое моделирование режимов электроэнергетических систем в условиях неопределенности. Улан-Батор : МГТУ, 1999. 348 с.
2. Богатырев Л. Л. Решение электроэнергетических задач в условиях неопределенности. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 1995. 116 с.
3. Липес А. В. Применение методов математической статистики для решения электроэнергетических задач : учебное пособие. Свердловск : Изд-во УПИ, 1983. 88 с.
4. Арзамасцев Д. А., Липес А. В. Снижение технологического расхода энергии в электрических сетях. М. : Высш. шк., 1989. 127 с.
5. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М. : Высш. шк., 2002.
6. Гнеденко В. В. Курс теории вероятностей. М. : Наука, 1969.
7. Венцель Е. С. Теория вероятностей : учеб. для вузов. 6 изд. стер. М. : Высш. шк., 1999. 576 с.
8. Чистяков В. П. Курс теории вероятности. М. : Наука, 1976. 255 с.
9. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М. : Мир, 1964.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. М. : Наука., 1968. 720 с.
11. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов / сост. И. Н. Бронштейн, К. А. Семендяев. М. : Наука. 1981. 720 с.
12. Кокс Д. Р., Смит В. Л. Теория восстановления. М. : Сов. радио, 1967.
13. Крамер Г. Математические методы статистики. М. : Мир. 1975. 648 с.
14. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. М.: ГИФМЛ, 1958. 333 с.
15. Кирпикова И. Л., Обоскалов В. П. Математические задачи энергетики : учебное пособие. Екатеринбург : УрФУ, 2013. 170 с.
16. Худсон Д. Статистика для физиков. М. : Мир, 1967. 242 с.
17. Бард Й. Нелинейное оценивание параметров. М. : Статистика, 1979. 349 с.
18. Dixon W. J., Massey F. J. Introduction to statistical analysis. McGraw-Hill Book Co, 1969. 638 с.
19. Кендал М. Дж., Стьюарт А. Многомерный статистический анализ и временные ряды. М. : Наука, 1976. 736 с.

20. Рао С. Р. Линейные статистические методы и их применение. М. : Наука, 1968. 547 с.
21. Гамм А. З. Статистические методы оценивания состояний электрических систем. М. : Наука, 1976. 220 с.
22. Файбисович В. А. Определение параметров электрических систем: Новые методы экспериментального определения. М. : Энергоиздат, 1982. 120 с.
23. Йереског К. Г., Клован Д. И., Реймент Р. А. Геологический факторный анализ. Л. : Недра, 1980. 222с.
24. Лоули Д., Максвелл А. Факторный анализ как статистический метод. М. : Мир., 1967. 144 с.
25. Манусов В. З. Вероятностные задачи в электроэнергетике : учебное пособие. Новосибирск : НЭТИ, 1982. 118 с.
26. Справочник по теории вероятностей и математической статистике / В. С. Корольюк [и др.]. М. : Наука, 1985. 640 с.
27. Маркович И. М. Режимы энергетических систем. М. : Энергия, 1969. 352 с.
28. Волков Г. А. Оптимизация надежности электроэнергетических систем. М. : Наука, 1986.
29. Непомнящий В. А. Надежность оборудования энергосистем. Изд. журнала «Электроэнергия», 2013. 196 с.
30. Вычислительные модели потокораспределения в электрических системах / Б. И. Аюев [и др.]. М. : Флинта: наука, 2008. 256 с.
31. Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход. М. : Мир, 1978.
32. Берж К. Теория графов и ее применения. М. : ИЛ, 1962.
33. Харри Ф. Теория графов. М. : Мир, 1973.
34. Bron C., Kerbosh J. Algorithm 457 – Finding all cliques of an undirected graph // Comm of ACM. 1973. 16. P. 575.
35. Welch J. T. A mechanical analysis of the cyclic structure of indirected linear graph // Jl. of ACM. 1966. 13. P. 205.
36. Свами М., Тхуласираман К. Графы, сети и алгоритмы. М. : Мир, 1984.
37. Форд Л., Фалкерсон Д. Потоки в сетях / пер с англ. М. : Наука, 1966.

Оглавление

ЧАСТЬ I. ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	6
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ	6
1.1. Базовые понятия	6
1.1.1. События	6
1.1.2. Случайные величины и случайные процессы	9
1.1.3. Вероятность	11
1.1.4. Вероятностные характеристики случайных величин	15
1.1.5. Параметры случайных величин	18
1.2. Распределения дискретных случайных величин	22
1.2.1. Вырожденное распределение	22
1.2.2. Распределение Бернулли	22
1.2.3. Биномиальное распределение	23
1.2.4. Распределение Пуассона	27
1.3. Распределения непрерывных случайных величин	30
1.3.1. Равномерное распределение	32
1.3.2. Нормальное распределение (распределение Гаусса)	32
1.3.3. Экспоненциальное (показательное) распределение	36
1.3.4. Распределение Вейбулла	38
1.3.5. Распределение Эрланга	40
1.3.6. Гамма-распределение	41
1.3.7. Усеченное распределение	43
1.4. Многомерные случайные величины	46
1.4.1. МО и дисперсии многомерных случайных величин	48
1.4.2. Корреляционные моменты дискретных случайных величин	50
1.4.3. Дисперсия и корреляционная матрица комплексных случайных величин	52
1.4.4. Регрессионная зависимость	56
1.4.5. Многомерное нормальное распределение	56
1.5. Функции от случайных величин	64
1.5.1. Характеристическая функция случайной величины	67
1.5.2. Характеристическая функция суммы случайных величин	70
1.5.3. Производящая функция моментов	70
2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА	73
2.1. Характеристика задач и методов, используемых в математической статистике	73
2.2. Анализ «по выборке». Свойства и функции выборки	76

2.3. Точечные и интервальные оценки параметров случайных величин	79
2.3.1. Математические ожидания и дисперсии больших выборок	80
2.3.2. Принятие статистических решений	83
2.3.3. Распределения Пирсона, Стьюдента, Фишера	84
2.3.4. Интервальные оценки МО	86
2.3.5. Интервальные оценки дисперсии	90
2.4. Решение задач проверки статистических гипотез и значимости	93
2.4.1. Проверка гипотезы о нормальном законе распределения	94
2.4.2. Значимость колебаний нагрузки. Распределение Фишера	98
3. ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	103
3.1. Метод максимального правдоподобия	104
3.2. Задачи оценки параметров распределений	109
3.2.1. Параметры нормального распределения	109
3.2.2. Обработка эксперимента	110
3.2.3. Ошибки измерений	111
3.2.4. Условный метод максимального правдоподобия	111
3.2.5. Оценивание параметров установившегося режима	112
3.3. Оптимизационная постановка метода максимального правдоподобия	115
3.3.1. Получение точечных оценок параметров	115
3.3.2. Интервальные оценки параметров	116
3.3.3. Учет дополнительных факторов	119
4. ФАКТОРНЫЙ АНАЛИЗ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН	122
4.1. Метод компонентного анализа	123
4.1.1. Линейная комбинация случайных величин с максимальной дисперсией	124
4.1.2. Необходимое число выделяемых главных компонент	128
4.2. Решение задач анализа режима электрических систем методом главных компонент	130
4.2.1. Моделирование графиков нагрузок методом главных компонент	130
4.2.2. Применение факторного моделирования нагрузок для определения потерь электрической энергии	133
4.3. Понятие о методе собственно факторного анализа	134
4.4. Определение собственных чисел и векторов для матриц выборочных корреляционных моментов	137

5. ПРИМЕНЕНИЕ ВЕРОЯТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ	138
5.1. Дефицит мощности в ЭЭС	141
5.1.1. Небаланс мощности в объединенной ЭЭС	141
5.1.2. Дискретная случайная генерация и детерминированная нагрузка	144
5.1.3. Непрерывная случайная нагрузка и детерминированная генерация	145
5.1.4. Вероятностный характер нагрузки (нормальное распределение) и генерации (биномиальное распределение)	146
5.1.5. Дискретная нагрузка, дискретная генерация	147
5.1.6. Непрерывная генерация, непрерывная нагрузка	148
5.2. Оптимальный резерв мощности в концентрированной ЭЭС	149
5.2.1. Детерминированная генерация	149
5.2.2. Вероятностный характер генерации	153
5.2.3. Небаланс мощности	154
5.2.4. Детерминированная нагрузка	156
5.3. Число часов использования максимума и максимальных потерь ..	158
5.4. Расчет потерь энергии в сети постоянного тока при вероятностных нагрузках	160
5.4.1. Дисперсионная составляющая потерь мощности	160
5.4.2. Уточненный расчет МО и матрицы корреляционных моментов напряжений	162
5.4.3. Квадратичная аппроксимация функции потерь	165
5.4.4. Самостоятельная работа	166
5.5. Расчет потерь энергии в сети переменного тока	170
5.5.1. Расчетные выражения	170
5.5.2. Уточненный расчет МО и матрицы корреляционных моментов напряжений в сети переменного тока	175
5.6. Расчет вероятностных параметров установившегося режима	183
5.6.1. Расчет установившегося режима сети постоянного тока ..	184
5.6.2. Численные примеры вероятностного анализа режимов электрических систем	185
ЧАСТЬ 2. ТЕОРИЯ ГРАФОВ	190
6. СХЕМЫ, ГРАФЫ, АЛГОРИТМЫ	190
6.1. Основные понятия теории графов	191
6.1.1. Графы. Определение	191
6.1.2. Пути и маршруты	193
6.1.3. Веса и длина пути	195

6.1.4. Петли, ориентированные циклы и циклы	196
6.1.5. Степени вершины	197
6.1.6. Подграфы	198
6.1.7. Типы графов.....	199
6.1.8. Сильно связные графы и компоненты графа	203
6.1.9. Матричные представления	204
6.2. Хранение информации о схемах.....	207
6.2.1. Соотнесение исследуемого объекта и графа.....	207
6.2.2. Хранение информации о графе. Связные списки	209
6.2.3. Алгоритм заполнения связного списка	213
6.3. Достижимость и связность.....	216
6.3.1. Введение	216
6.3.2. Матрицы достижимостей и контрдостижимостей.....	218
6.3.3. Нахождение сильных компонент	219
6.3.4. Базы.....	220
6.3.5. Алгоритм проверки связности графа	221
6.4. Независимые и доминирующие множества	223
6.4.1. Независимые множества	223
6.4.2. Алгоритм построения всех максимальных независимых множеств.....	225
6.4.3. Доминирующие множества	227
6.5. Деревья	229
6.5.1. Введение	229
6.5.2. Построение всех остовных деревьев	230
6.6. Циклы, разрезы и задача Эйлера	235
6.6.1. Введение	235
6.6.2. Цикломатическое число и фундаментальные циклы	236
6.6.3. Разрезы	239
6.6.4. Матрицы циклов и разрезов.....	241
6.6.5. Эйлеровы циклы.....	244
7. ПОТОКИ В СЕТЯХ	246
7.1. Основная задача о максимальном потоке (от s к t).....	247
7.2. Алгоритм расстановки пометок для задачи о максимальном (от s к t) потоке	250
7.3. Простые варианты задачи о максимальном потоке (от s к t)	257
7.3.1. Графы со многими источниками и стоками	257
7.3.2. Графы пропускными способностями дуг и вершин	258
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	260
8. СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	264

Учебное издание

Обоскалов Владислав Петрович
Кокин Сергей Евгеньевич
Кирпикова Ирина Львовна

**ПРИМЕНЕНИЕ
ВЕРОЯТНОСТНО-СТАТИСТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ И ТЕОРИИ ГРАФОВ
В ЭЛЕКТРОЭНЕРГЕТИКЕ**

Редактор *В. О. Корионова*
Компьютерный набор *Е. В. Осиповой*

Подписано в печать 07.11.2016. Формат 60×84 1/16.
Бумага писчая. Плоская печать. Усл. печ. л. 15,81.
Уч.-изд. л. 14,4. Тираж 200 экз. Заказ 412.

Издательство Уральского университета
Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5
Тел.: 8 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41
E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620075, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4
Тел.: 8 (343) 350-56-64, 350-90-13
Факс: 8 (343) 358-93-06
E-mail: press-urfu@mail.ru

Для заметок

